COLEÇÃO F. T. D.

ALGEBRA
ELEMENTAR

PARA USO

das escolas primarias e secundarias
segundo os programas do Colégio Pedro II
das Escolas Normais, etc.

CURSO MÉDIO

(Segue a ortografia oficial)

LIVRARIA PAULO DE AZEVEDO & Cª

166, Rua do Ouvidor
RIO DE JANEIRO

49A, Rua Libero Badaró
SÃO PAULO

BELO HORIZONTE, *Rua da Baia, 1052*

COLEÇÃO F. T. D.

ALGEBRA

ELEMENTAR

PARA USO

das escolas primarias e secundarias
segundo os programas do Colégio Pedro II
das Escolas Normais, etc.

CURSO MÉDIO

LIVRARIA PAULO DE AZEVEDO & Cª

166, Rua do Ouvidor | *49A, Rua Libero Badaró*
RIO DE JANEIRO | **SÃO PAULO**

BELO HORIZONTE, *Rua da Baía, 1052*

NIHIL OBSTAT.
S. Pauli, 22 Julii 1925.
Can. Dor: MARTINS LADEIRA, *Censor.*

IMPRIMA-SE.
S. Paulo, 22 Julii 1925
Monsr. PEREIRA BARROS,
pro-Vigario Geral.

NA MESMA COLEÇÃO:

CALCULO

Caderno de Algarismos.
Primeiro Livrinho de Calculo, ensino intuitivo da numeração e 4 contas, ilustrado.
Exercícios de Calculo, *sem problemas*, sobre as 4 operações.
800 Problemas sobre as 4 operações, para principiantes.
Exercícios de calculo, *com problemas*, sobre as 4 operações.
Parte do mestre, a mesma para os 3 livros precedentes.

ARITMETICA

Aritmética, curso preparatório, numeração, 4 contas, sistema métrico.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
Aritmética, c. elementar, admissão aos ginásios.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
Aritmética, curso secundário, prog. ginasial completo.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
Aritmética, curso superior, admissão ás Escolas Superiores.
O mesmo livro, *parte do mestre.*

ALGEBRA

Noções de Algebra, *curso elementar*, prog. do 1.º e do 2.º ano gin.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
Algebra, curso médio, programa gin. completo.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
Algebra, c. sup., adm. a todas as Escolas Superiores.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
Complementos de Algebra, programa do 4.º ano gin.
O mesmo livro, *parte do mestre.*

GEOMETRIA

Geometria, curso elementar, prog. do 2.º ano ginasial.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
Geometria, curso médio, progr. do 3.º ano gin:, admissão ás Escolas Superiores.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
Geometria, curso sup., admissão a todas as Escolas Superiores.
O mesmo livro, *parte do mestre.*

TRIGONOMETRIA — LOGARITMOS

Trigonometria elementar, programa oficial completo.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
Novas taboas de Logaritmos a 7 decimais, de 1 até 10.000, e das funções trigon.

ENSINO COMERCIAL

Escrituração mercantil, curso médio, para principiantes.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
Curso de estenografia, alfabeto Duployé.
Principios e regras de estenografia, alfabeto Duployé,

ALGEBRA, CURSO MEDIO

CALCULO ALGÉBRICO

NUMEROS ALGÉBRICOS

§ I. — Noções preliminares.

1*a*. **Insuficiência dos números aritméticos.** — Os números aritméticos não permitem avaliar certas grandezas com exatidão suficiente.

Com efeito, se dissermos, por exemplo :
1.º A *temperatura* de tal corpo é de 10º ;
2.º A *altitude* de um ponto dado é de 250 m. ;
3.º Tal *acontecimento* se deu no anno 54 ;
4.º Sobre uma linha dada, o ponto B dista de 5 m. do ponto A, exprimimos idéas incompletas.

A exatidão exige que digamos :
1.º A *temperatura* é de 10º *acima* ou *abaixo* de 0º ;
2.º A *altitude* é de 250 m. *acima* ou *abaixo* do nivel do mar ;
3.º Tal *acontecimento* se deu 54 anos *antes* ou *depois* do começo de tal era ;
4.º O ponto B *dista* de 5 m. *á direita* ou *á esquerda* do ponto A

2*a*. **Números algébricos.** — Querendo determinar o *sentido* em que se deve avaliar uma grandeza, antepõe-se ao número aritmético, que mede essa grandeza, o sinal + ou o sinal —.

Nota. — Aqui os sinais + e — não têm signaficação aditiva ou subtrativa : apenas designam um sentido e são inseparavelmente unidos aos números aritméticos transformando-os, desta arte, em números algébricos.

Os números aritméticos precedidos do signal + são números *positivos*. Os números aritméticos precedidos do sigal — são números *negativos*.

O conjunto dos números positivos e dos números negativos, inclusive zero, representa os *números algébricos*, chamados ainda números *orientados*, *qualificados* ou *relativos*.

3*a*. **Valor absoluto de um número algébrico.** — E' o número aritmético obtido suprimindo o sinal.

Representa-se o *valor absoluto* de um número algébrico, pondo esse número entre *dois riscos verticais*. Por exemplos :

$$|+5|=5 \quad e \quad |-2|=2,$$

expressões que se lêm :

O valor absoluto de $+5$ *é* 5.

O valor absoluto de -2 *é* 2.

Observação. — I. Por convenção, qualquer número positivo iguala seu valor absoluto : $+4=4$.

Observação. — II. Numa série ilimitada de números positivos, como : $+1, +5, +50, +500, +5000... +\infty$, por convenção representa-se o maior pelo simbolo $+\infty$ *(mais o infinito)*.

Numa série ilimitada de números negativos, como $-1, -5, -50, -500... -\infty$, por convenção, representa-se o maior em valor absoluto pelo simbolo $-\infty$ *(menos o infinito)*.

4*a*. **Números iguais, desiguais, opostos.** — *Dois números algébricos são iguais quando têm mesmo valor absoluto e mesmo sinal.*

Entre os dois, põe-se o sinal $=$ (que se lê *iguala*).

Podemos escrever : $+4=+4; -3=-3$.

Dois números algébricos são desiguais quando não têm mesmo valor absoluto ou mesmo sinal.

Entre os dois, põe-se o signal $\neq$ *(diferente de)*.

Podemos escrever :

$$+4\neq+5 ; \qquad +2\neq-1.$$

Dois números algébricos são opostos quando têm mesmo valor absoluto e sinais contrarios.

Ex. : $+5$ e -5.

5*a*. **Representação gráfica dos números algébricos.** — Suponhamos uma réta ilimitada X′X *(fig.1)* ; marquemos um ponto fixo O sobre essa réta ; esse ponto se chama : *origem.*

X' -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 X
O

FIG. 1.

Por convenção, consideramos o sentido OX como *positivo* e o sentido OX′ como *negativo*. A réta X′X é um *eixo dirigido*, isto é, um eixo sobre o qual estabelecemos um sentido.

A' *direita* do ponto O, levemos certo numero de vezes um comprimento, tomado como unidade, teremos pontos cuja *abscissa* (isto é, a distancia ao ponto O) é : $+1, +2, +3, +4, +5, +6$, etc...

A' *esquerda* do ponto O, levemos certo numero de vezes a mesma unidade de comprimento e teremos pontos cuja abscissa é : $-1, -2, -3, -4, -5, -6$...

-9 -4 0 5 10
X' N' M' O M N X

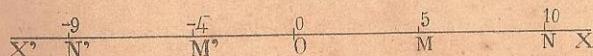



FIG. 2.

No eixo dirigido acima, considerando o *segmento* (parte de réta) OM, a abscissa do ponto M sendo $+5$; diremos que o segmento $\overline{OM}=+5$ é um *segmento positivo.*

Considerando o segmento OM′, a abscissa do ponto M′ sendo -4, teremos $\overline{OM'}=-4$; $\overline{OM'}$ é um *segmento negativo.*

O segmento $\overline{MN}$ tem por origem o ponto M (abscissa, $+5$), e sua extremidade no ponto N (abscissa, $+10$) ; tem mesmo sentido que $\overline{OM}$, é segmento positivo e temos : $\overline{MN}=+5$.

O segmento $\overline{M'N'}$, de mesmo sentido que $\overline{OM'}$, é segmento negativo e temos : $\overline{M'N'}=-5$ *(fig. 2)*.

6*a*. **Consequências.** — 1.º *Dados tres pontos sobre um eixo dirigido* :A, B, C, *(fig. 3) teremos sempre :*

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

Seja o eixo dirigido X′X e os pontos A, B, C, sobre esse eixo.

X' A C B X

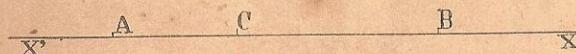



FIG. 3.

De A a B se tivermos uma distância de 7 cm. ; de B a C se tivermos 4 cm., os respetivos comprimentos dos segmentos dados serão (não esqueçamos o sentido) :

$$\overline{AB}=+7 ; \overline{BC}=-4 ; \overline{CA}=-3.$$

Somando, teremos :

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=+7-4-3=0.$$

2.º *Dado um segmento MM′ sobre um eixo dirigido, de origem*

O (*fig.* 4), *o valor algébrico desse segmento iguala a abscissa de sua extremidade diminuida da abscissa de sua origem.*

Seja o eixo dirigido X'X, o ponto de origem O e segmento MM' tal que a abscissa do ponto M seja +2 e a do ponto M', +7.

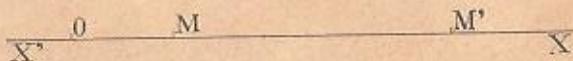



Fig. 4.

Teremos : $\overline{MM'} = \overline{OM'} - \overline{OM} = +5$.

Com efeito, a relação da consequência precedente dá :

$$\overline{OM} + \overline{MM'} + \overline{M'O} = 0.$$

Acrescentemos a ambos os membros dessa igualdade a expressão : $\overline{OM'} - \overline{OM}$, teremos :

$$\overline{OM} + \overline{MM'} + \overline{M'O} + \overline{OM'} - \overline{OM} = \overline{OM'} - \overline{OM}.$$

Simplificando o primeiro membro, teremos :

$$\overline{MM'} = \overline{OM'} - \overline{OM},$$

porque $\overline{OM} - \overline{OM} = 0,$

e $\overline{M'O} + \overline{OM'} = 0.$

§ II. — Adição dos números algébricos.

7*a*. **Definição.** — *Soma algébrica de dois números é o resultado obtido somando o valor absoluto desses números, se tiverem o mesmo sinal ou diminuindo seu valor absoluto, se tiverem sinais contrarios, dando ao resultado o sinal do número que tiver maior valor absoluto.*

Apliquemos essa definição aos exemplos seguintes e teremos :

$$(+4)+(+6)=+10,$$
$$(-4)+(-6)=-10,$$
$$(+6)+(-4)=+2,$$
$$(-6)+(+4)=-2.$$

8*a*. **Regra.** — Para somar varios números algébricos devemos

1.º *Somar todos os números positivos ;*

2.º *Somar todos os números negativos ;*

3.º *Subtrair os resultados, dando á diferença o sinal do número que tiver o maior valor absoluto.*

Apliquemos essa regra aos exemplos seguintes :

a) $(+2)+(+5)+(+7)=+14.$

b) $(-2)+(-5)+(-7)=-14.$

c) $(+7)+(+4)+(-2)+(-5)=(+11)+(-7)=+4.$

d) $(-7)+(-4)+(+2)+(+5)=(-11)+(+7)=-4.$

e) $(+5)+(-2)+(-3)+(+4)+(-1)=(+9)+(-6)=+3.$

9*a*. **Observação.** — Certas propriedades dos números aritméticos, estudadas em aritmética, aplicam-se tambem aos números algébricos. Eis as principais :

1.º *Numa soma de números algébricos, podemos inverter a ordem dos termos.*

No exemplo do Nº precedente (letra *e*), invertendo a ordem dos termos, chegamos ao mesmo resultado.

$$(-2)+(+4)+(+5)+(-1)+(-3)=(-6)+(+9)=+3.$$

2.º *Numa soma de números algébricos, podemos substituir varios termos por sua soma.*

No exemplo precedente (letra *e*) substituindo o 1º e o 2º termo por sua soma $(+5)+(-2)=(+3)$,

e o 3º mais o 4º tambem por sua soma $(-3)+(+4)=(+1)$, teremos :

$$(+3)+(+1)+(-1)=(+4)+(-1)=+3,$$

resultado igual ao precedente.

10*a*. — Aplicações.

I. — **Problema de distâncias.** — *A distância São Paulo ao Rio é de 500 km (fig.5). Do Rio a Cruzeiro, ha 251 km. De Cruzeiro á Barra do Piraí, ha 137 km. Da Barra do Piraí á Aparecida, ha 199 km. A que distância de S. Paulo se acha o viajante que fez o percurso :*

São Paulo—Rio—Cruzeiro—Barra—Aparecida.

Fig. 5.

Consideremos como positivo o sentido S. Paulo-Rio e como negativo a direção oposta Rio-S. Paulo. A distância S. Paulo-Aparecida será o resultado da soma algebrica dos diversos percursos :

$$(+500)+(-251)+(+137)+(-199)=(+637)+(-450)=187.$$

A distância procurada é **187 km.**

II. — **Problema sobre lucros e perdas.** — *Um jogador ganha 3$ na primeira partida e 2$ na segunda ; perde 4$ na*

terceira, ganha 1$500 *na quarta, perde* 3$500 *na quinta. Quanto ganhou ou perdeu?*

Consideremos os *lucros* como quantidades *positivas* e as *perdas* como quantidades *negativas*.

O resultado final das cinco partidas iguala a soma algebrica dos resultados de cada partida, temos :

$$(+3)+(+2)+(-4)+(+1,500)+(-3,500)$$
$$=(+6,500)+(-7,500)=-1.$$

Perdeu, portanto, 1$000.

III. Problema de receitas e despesas. — *Um negociante tem* 850$ *em caixa. No mesmo dia, recebe* 540$, *paga uma conta de* 250$; *recebe de um freguez* 2:500$, *põe no banco* 1:800$, *á vista vende por* 500$ *de mercadorias e paga uma letra de* 620$. *Quanto tem em caixa no fim desse dia?*

Aqui as receitas serão quantidades positivas e as despesas serão quantidades negativas. A situação final da caixa é o resultado da soma algebrica seguinte :

$$(+850)+(+540)+(-250)+(2:500)+(-1:800)+(+500)$$
$$(-620)=(+4:390)+(-2:670)=+1:720.$$

O negociante tem em caixa : **1:720$000.**

§ 3. — Subtração dos números algébricos

11*a*. Definição. — *Achar a diferença entre um número* a *e um número* b, *é determinar um terceiro número* c, *o qual somado com* b, *iguale* a, *de maneira que tenhamos:* $a-b=c$ *ou* $a=b+c$.

Apliquemos essa definição aos exemplos seguintes, teremos :

$(+10)-(+7)=+3,$ porque $(+7)+(+3)=+10$;
$(+10)-(-7)=+17,$ porque $(-7)+(+17)=+10.$

12*a*. Regra. — *De um número* a, *para subtrair um número* b *junta-se a* a *o número oposto a* b.

Ex. : $(+10)-(+7)=(+10)+(-7)=+3.$
$(+10)-(-7)=(+10)+(+7)=+17.$

13*a*. Observação. — Como na adição, as propriedades dos números aritméticos relativas á subtração, aplicam-se tambem aos números algébricos. Aí vão as principais :

1.º *A um número, para acrescentar uma diferença algébrica junta-se o minuendo e tira-se o subtraendo.*

Seja o número $(+10)$, acrescentemos-lhe a diferença : $(+7)-(+3)$; teremos :

$$(+10)+(+7)-(+3)=(+17)-(+3)=+14.$$

Esse resultado é identico ao que teriamos achado, se tivessemos calculado a diferença $(+7)-(+3)=(+4)$, para juntá-la a $(+10)$:

$$(+10)+(+4)=(+14).$$

2.º *De um número ou de uma soma algébrica, para tirar outra soma algébrica, junta-se a 2.ª soma trocando os sinais dos termos.*

a) Seja o número $(+14)$; para tirar a soma $(+3)+(+5)+(-6)$, teremos :

$$(+14)+(-3)+(-5)+(+6)=+12.$$

b) Seja a soma $(+15)+(-2)$; para tirar a soma $(+3)+(+5)+(-6)$, teremos :

$$(+15)+(-2)+(-3)+(-5)+(+6)=+11.$$

14*a*. Observação. — De quanto acabamos de explicar podemos deduzir :

1.º *Uma soma algébrica não muda suprimindo os parêntesis precedidos do sinal* +.

Com efeito, temos :

$$(+15)+(-2)+(-3)+(-5)+(+6)=+11,$$
e
$$15-2-3-5+6=11,$$

valores identicos.

2.º *E' necessário mudar o sinal dos termos entre parêntesis, quando suprimimos parêntesis precedidos do sinal* —.

Com efeito, temos :

$$(+8)-(-7)=8+7=15,$$

ou ainda $(+8)-(-7+2-3)=8+7-2+3=16.$

15*a*. Aplicações.

I. Problema de distâncias. — *Dois correios partem de um mesmo ponto O, situado sobre uma réta e seguindo direções opostas. O primeiro percorre 50 km. á direita de O e o segundo percorre 45 km. á esquerda de O. Qual é é a distância que os separa?*

Consideremos como positivo o deslocamento á direita de O e como negativo o deslocamento á esquerda. O primeiro correio estará a +50 km. de O.

O segundo correio estará a —45 km. de O. A distância entre ambos será : (+50)—(—45)=50+45=**95 km**.

Nota. — Se os dois correios se movessem á direita de O, a distância entre êles seria (+50 km.)—(+45 km.)=50—45=**5 km**.

II. Problema de temperaturas. — *Um termómetro de máxima e mínima marcou como mais alta temperatura 34º acima de zero e como mais baixa temperatura 5º abaixo de zero. Qual é a diferença dessas duas temperaturas ?*

Consideremos a temperatura acima de zero como positiva e como negativa abaixo de zero.

A diferença entre as temperaturas extremas será de :

$$(+34^\circ)-(-5^\circ)=34+5=\mathbf{39^\circ}.$$

§ IV. — Multiplicação dos números algébricos.

16*a*. **Definição**. — *Produto de dois números algébricos é o resultado obtido multiplicando os valores absolutos desses números entre si e dando ao resultado o sinal + ou o sinal — segundo os dois números tiverem mesmos sinais ou sinais contrários.*

Ex. :
$$(+7)\times(+5)=+35,$$
$$(-7)\times(-5)=+35,$$
$$(+7)\times(-5)=-35,$$
$$(-7)\times(+5)=-35.$$

17*a*. **Regra dos sinais**. — O produto de dois números positivos é positivo :

$$(+)\times(+)=+.$$

O produto de dois números negativos é positivo :

$$(-)\times(-)=+.$$

O produto de um número positivo por um número negativo é negativo :

$$(+)\times(-)=-.$$

O produto de um número negativo por um número positivo é negativo :

$$(-)\times(+)=-.$$

18*a*. **Produtos de vários números**. — *Produto de vários numeros é o resultado obtido multiplicando os valores absolutos desses números e dando ao resultado o sinal + se o número dos factores negativos fôr* nulo *ou par e o sinal — se o numero dos factores negativos fôr impar.*

Podemos escrever :

a) $(-5)\times(+4)\times(-2)\times(+3)=+120.$

b) $(+5)\times(-4)\times(-2)\times(-3)=-120.$

19*a*. **Potência de um número**. — *Potência* m *de um número é o produto de* m *factores iguais a esse número.*

Empregando a definição de um produto de varios factores, podemos escrever : $(+4)^3=(+4)\times(+4)\times(+4)=+\mathbf{64}.$

$$(-5)^3=(-5)\times(-5)\times(-5)=-\mathbf{125}.$$
$$(-2)^4=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=+\mathbf{16}.$$

Donde deduzimos a regra seguinte :

1.º *Qualquer potência de um número positivo é positiva ;*
2.º *Uma potência par de um número negativo é positiva ;*
3.º *Uma potência impar de um número negativo é negativa.*

20*a*. **Observação**. — As propriedades dos números aritméticos relativas à multiplicação aplicam-se tambem aos numeros algebricos.

Eis algumas :

1.º *Para multiplicar uma soma algébrica por um número multiplica-se cada parcela por esse número e juntam-se os resultados.*

Seja a soma algébrica :

$$(+5)+(-2)+(+3)$$

a multiplicar por (—4).

Multiplicando cada parcela por (—4), teremos :

$$\left.\begin{array}{l}(+5)\times(-4)=-20\\(-2)\times(-4)=+8\\(+3)\times(-4)=-12\end{array}\right\}\text{ ou: }-20+8-12=-24.$$

Esse resultado é idêntico ao que teriamos obtido efetuando a soma algébrica e multiplicando o resultado por (—4).

Com efeito :

$$(+5)+(-2)+(+3)=8-2=6\ ;$$
$$(+6)\times(-4)=-24.$$

2.º *Para multiplicar duas somas algébricas entre si, multiplicam-se todas as parcelas da primeira sucessivamente por todas as parcelas da outra, e juntam-se os produtos.*

Ex. : $[(+5)+(-2)+(+3)]\times[(+7)+(-4)].$

Apliquemos a regra precedente e teremos :

$$[(+5)+(-2)+(+3)]\times(+7)=(+35)+(-14)+(+21)=+42.$$
$$[(+5)+(-2)+(+3)]\times(-4)=-20+8-12=-24.$$

Somando os resultados, temos :

$$(+42)+(-24)=+\mathbf{18}.$$

Resultado idêntico ao que teriamos obtido efetuando as duas somas e fazendo depois o produto.

Com efeito :

$$(+5)+(-2)+(+3)=6, \text{ e } (+7)+(-4)=+3$$
$$(+6)\times(+3)=+18.$$

3º *Num produto de varios factores algebricos, podemos mudar arbitrariamente a ordem dos factores, sem alterar o produto.*

Seja o produto : $(-3)\times(+5)\times(+2)\times(-4)$.

Efetuando na ordem indicada, temos :

$$(-3)\times(+5)\times(+2)\times(-4)=+\mathbf{120}.$$

Adotando a ordem abaixo, temos tambem o mesmo resultado :

$$(+2)\times(-4)\times(+5)\times(-3)=+\mathbf{120}.$$

4.º *O produto de duas ou mais potências de um mesmo número algébrico é outra potência desse número com expoente igual á soma dos expoentes dos factores.*

a) Seja o produto : $(-2)^3\times(-2)^4$,

teremos :

$$(-2)^3\times(-2)^4=(-2)^{3+4}=(-2)^7=-\mathbf{128}.$$

Resultado identico ao que teriamos obtido avaliando separadamente cada factor e multiplicando os resultados, porque $(-2)^3=-8$ e $(-2)^4=+16$;

logo : $(-2)^3\times(-2)^4=(-8)\times(+16)=-128$.

b) Do mesmo modo, teremos :

$$(+3)^2\times(+3)^4\times(+3)^3=(+3)^{2+4+3}=3^9=\mathbf{19.683}.$$

21*a*. — Aplicação.

Problema de movimento. — *São* 12 horas. *Um móvel acha-se sobre uma linha* X'X *no ponto* O ; *move-se com velocidade* V=4 *km. por hora, durante um tempo* t=3 *horas. Que espaço o terá percorrido nesse tempo ?*

Dando a v e a t os valores aritméticos indicados no problema, achamos logo :

$$e=vt=4\times3=\mathbf{12\ km}.$$

Se considerarmos v e t como números algébricos, de sinal variavel ; se admitirmos que a velocidade v é positiva quando o movel vai da esquerda para a direita (no sentido da flecha) e negativa no caso contrário ; se admitirmos que o tempo t é positivo depois das 12 horas (meio dia) e negativo antes ; se considerarmos o espaço percorrido como positivo á direita

do ponto O e negativo á esquerda, quatro hipóteses se apresentam :

1.ª **Hipótese.** — $(v=+4,\ t=+3)$ *(fig. 6)*. — E' a solução aritmética. O valor de e é positivo e temos ;

$e=vt=(+4)\times(+3)=+$**12 km.**

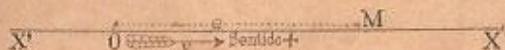



FIG. 6.

2.ª **Hipótese.** — $(v=-4,\ t=+3)$ *(fig. 7)*. — A velocidade é negativa, o movel vai da direita á esquerda, no sentido negativo,

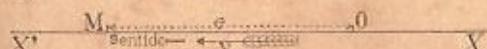



FIG. 7.

e temos : $e=(-4)\times(+3)=-$**12 km.**

O valor de e é negativo.

3.ª **Hipótese.** — $(v=4,\ t=-3)$ *(fig. 8)*. — Como o tempo é negativo, o enunciado do problema será : *Em que ponto da réta se achava o móvel, 3 horas antes do meio-dia, sabendo que ia no sentido positivo ?*

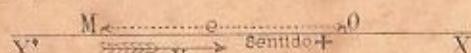



FIG. 8.

Neste caso, temos :

$$e=(+4)\times(-3)=-\mathbf{12\ km}.$$

Ás 9 horas antes do meio-dia, o movel se encontrava em M caminhava no sentido positivo e ás 12 horas estava em O.

4.ª **Hipótese.** — $(v=-4,\ t=-3)$ *(fig. 9)*. — Aqui o enunciado do problema póde ser :

Onde estava o móvel, 3 horas antes do meio-dia, sabendo que caminhava no sentido negativo ?

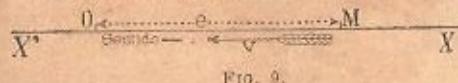



FIG. 9.

Nesta hipótese, temos :

$$e=(-4)\times(-3)=\mathbf{12\ km}.$$

Ás 9 horas o móvel estava em M, caminhou no sentido negativo, e, ás 12 horas, estava en O, depois de percorrer um espaço positivo.

Observação. — Os resultados desse problema são uma verificação grafica da regra dos sinais, na multiplicação.

§ V. — Divisão dos números algébricos.

22*a*. **Definição.** — *Dados dois números algébricos, um, chamado dividendo, outro, divisor, quociente desses dois números é um terceiro número que multiplicado pelo divisor, reproduz o dividendo.*

$$(+18) \div (+3) = +6, \text{ porque } (+6) \times (+3) = +18;$$
$$(+18) \div (-3) = -6, \text{ porque } (-6) \times (-3) = +18;$$
$$(-18) \div (+3) = -6, \text{ porque } (-6) \times (+3) = -18;$$
$$(-18) \div (-3) = +6, \text{ porque } (+6) \times (-3) = -18.$$

23*a*. **Regra.** — *Para achar o quociente de dois números algébricos, divide-se o valor absoluto do dividendo pelo valor absoluto do divisor, dando ao resultado o sinal + se ambos tiverem o mesmo sinal, e o sinal —, se tiverem sinais contrários.*

24*a*. **Observação.** — As propriedades dos números aritméticos relativas á divisão, aplicam-se tambem aos números algébricos.

Eis as principais :

1.º *Para dividir uma soma algébrica por um número, basta dividir cada parcela e juntar os resultados.*

Seja a soma algébrica :

$$(-24) + (+15) + (-9) + (+12)$$

a dividir por (-3) ; teremos, dividindo cada parcela,

$$\left.\begin{array}{l}(-24) \div (-3) = +8 \\ (+15) \div (-3) = -5 \\ (-9\ ) \div (-3) = +3 \\ (+12) \div (-3) = -4\end{array}\right\} \text{ ou somando } +8-5+3-4=+2.$$

Resultado identico ao que se obtem efetuando a soma e dividindo o total por (-3).

Com efeito :

$$(-24)+(+15)+(-9)+(+12)=(+27)+(-33)=-6,$$

e

$$(-6) \div (-3) = +2.$$

2º *O quociente de duas potências de mesmo número algébrico é outra potência desse numero com expoente igual á diferença dos expoentes no dividendo e no divisor.*

Exemplo : dividir $(-2)^5$ por $(-2)^2$;

temos : $(-2)^5 \div (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3 = -8$.

Resultado identico ao que se obtem efetuando as operações indicadas no dividendo e no divisor, e procurando o quociente dos resultados.

Com efeito : $(-2)^5 = -32$; $(-2)^2 = +4$;

$$(-2)^5 \div (-2)^2 = (-32) \div (+4) = -8.$$

25*a*. — Aplicação.

Problema de movimento. — *E' meio-dia. Um móvel está em O, move-se sobre X'X e percorre um espaço e=28 km. em um tempo t=4 horas. Qual é a velocidade v do movimento?*

Dando a *e* e *v* os valores aritméticos, teremos imediatamente :

$$v = \frac{e}{t} = \frac{28}{4} = 7 \text{ km.}$$

Considerando essas mesmas grandezas como números algébricos, de sinal variavel, poderemos fazer as mesmas considerações do numero 21*a* e teremos :

1.ª **Hipótese.** — *($e=+28$, $t=+4$) (fig. 10).* — E' a solução aritmética ; o valor de *v* é positivo e temos :

$$v = \frac{e}{t} = \frac{+28}{+4} = +7 \text{ km.}$$

X' O e M X v Sentido+

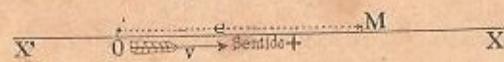



Fig. 10.

2.ª **Hipótese.** — *($e=-28$, $t=+4$) (fig. 11).* — Como o espaço percorrido é negativo, o movel anda da direita para a esquerda e a velocidade é negativa. Com efeito :

X' M e O X Sentido— v

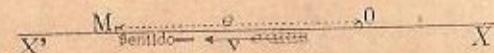



Fig. 11.

$$v = \frac{e}{t} = \frac{-28}{+4} = -7 \text{ km.}$$

3.ª **Hipótese.** — *($e=+28$, $t=-4$) (fig. 12).* — Neste caso, o problema póde ser enunciada do modo seguinte : *Com que*

velocidade caminhou um móvel que levou 4 horas para chegar ao meio-dia, no ponto O, depois de percorrer o espaço e=28 km?

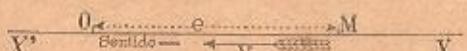



FIG. 12.

A velocidade é negativa e o móvel caminhou da direita para a esquerda.

$$v=\frac{e}{t}=\frac{+28}{-4}=\mathbf{-7\ km.}$$

4.ª **Hipótese.** — *(e=—28, t=—4) (fig. 13).* — Nesse caso, o problema deve enunciar-se : *Com que velocidade caminhou um móvel que levou 4 horas para chegar ao meio-dia, no ponto O, depois de ter percorrido o espaço negativo e=—28 km?*

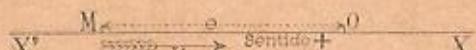



FIG. 13.

A velocidade é positiva e o móvel andou da esquerda para a direita. Com efeito :

$$v=\frac{-28}{-4}=\mathbf{+7\ km.}$$

§ VI. — Frações algébricas.

20*a*. **Propriedades.** — As frações algébricas têm as mesmas propriedades que as frações aritméticas.

Eis as principais :

1.º *Multiplicando ou dividindo ambos os termos de uma fração algébrica por um número diferente de zero, a fração não muda de valor.*

a) Seja a fração algébrica $\frac{(-3)}{(+4)}$.

Multipliquemos os dois termos por (—5), teremos :

$$\frac{(-3)}{(+4)}=\frac{(-3)\times(-5)}{(+4)\times(-5)}=\frac{+15}{-20}$$

Com efeito, podemos representar o valor da fração por q, e teremos :

$$\frac{(-3)}{(+4)}=q \qquad (1)$$

ou

$$(-3)=(+4).q. \qquad (2)$$

Multipliquemos ambos os membros de (2) por (—5), teremos:

$$(-3)\times(-5)=q\times(+4)\times(-5)\ ; \qquad (3)$$

dividindo os dois membros de (3) por (+4)×(—5), teremos :

$$\frac{(-3)\times(-5)}{(+4)\times(-5)}=q. \qquad (4)$$

Mas em (1) e (4), os segundos membros são iguais ; logo os primeiros membros são tambem iguais ; e

$$\frac{(-3)}{(+4)}=\frac{(-3)\times(-5)}{(+4)\times(-5)}=\frac{+15}{-20}.$$

Essa propriedade serve para *reduzir frações algébricas ao mesmo denominador.*

b) Demonstração análoga permite provar que se pódem dividir ambos os termos de uma fração por um mesmo numero, sem lhe mudar o valor.

Esta propriedade permite *simplificar frações algébricas.*

2.º *Para somar ou subtrair várias frações algébricas, é preciso reduzi-las ao mesmo denominador ; depois somar ou subtrair os numeradores e dar ao resultado o denominador comum.*

Seja somar as frações : $\frac{(-3)}{(+4)}, \frac{(+5)}{(-2)}, \frac{(+7)}{(-6)}$.

O denominador comum é (+12). Para obtê-lo multiplicam-se os denominadores das frações dadas respetivamente por (+3) (—6), (—2) ; multiplicam-se os numeradores pelos mesmos números ; as frações são : $\frac{(-9)}{(+12)}, \frac{(-30)}{(+12)}, \frac{(-14)}{+12}$.

A soma será :

$$\frac{(-9)}{12}+\frac{(-30)}{12}+\frac{(-14)}{12}=\frac{(-9)+(-30)+(-14)}{12}=\frac{-53}{12}.$$

3.º *O produto de duas ou mais frações algébricas iguala o produto dos numeradores dividido pelo produto dos denominadores.*

Sejam as frações : $\frac{(-3)}{(+4)}, \frac{(+5)}{(-2)}, \frac{(+7)}{(-6)}$.

O produto será :

$$\frac{(-3)}{(+4)}\times\frac{(+5)}{(-2)}\times\frac{(+7)}{(-6)}=\frac{(-3)\times(+5)\times(+7)}{(+4)\times(-2)\times(-6)}=\frac{-105}{+48},$$

resultado que podemos simplificar dividindo ambos os termos por 3, e teremos ; $\frac{-105}{48}=\frac{(-105)\div(+3)}{(+48)\div(+3)}=\frac{-35}{+16}$.

4º *O quociente de duas frações obtem-se multiplicando a fração dividendo pela fração divisor invertida.*

Achar o quociente de $\frac{(-5)}{(+3)}$ por $\frac{(+7)}{(+4)}$; teremos :

$$\frac{(-5)}{(+3)}\div\frac{(+7)}{(+4)}=\frac{(-5)}{(+3)}\times\frac{(+4)}{(+7)}=\frac{(-5)\times(+4)}{(+3)\times(+7)}=\frac{-20}{+21}.$$

EXERCICIOS

Operações sobre os números algébricos.

Somar os números ;

1a. +5, +3, —2.
2a. —4, +7, —5.
3a. +6, —9, +2.
4a. —4, +12, +7, —14.
5a. +12, —20, —2, —9.
6a. —1, +30, +7, —18.
7a. +5, —4, —7, +9, —12, +10.
8a. —9, —20, +16, +14, —9, —20.
9a. +14, +13, +26, —28, +18, +15, —27, +48.
10a. —18, +7, —32, —43, +36, —30, —30, +54, —37.
11a. *Qual é o valor da expressão* a+b+c, *para :*
1º *a*=+38, *b*=—25, *c*=17?
2º *a*=+120, *b*=+17, *c*=—98?
3º *a*=—75, *b*=—68, *c*=+116?
12a. *Qual é o valor da expressão* a+b+c+d, *para :*
1º *a*=+43, *b*=—23, *c*=—72, *d*=39?
2º *a*=—78, *b*=—49, *c*=+37, *d*=—24?
3º *a*=—127, *b*=+81, *c*=+210, *d*=—89?

Subtrair os números seguintes ;

13a. (+9) —(7).
14a. (+9) —(—7).
15a. (—12)—(+4).
16a. (—12)—(—4).
17a. (+37)—(—25).
18a. (—37) —(—42).
19a. (+25) —(—38).
20a. (+43) —(+39).
21a. (—27) —(—47).
22a. (—243)—(+76).
23a. *Qual é o valor da expressão* a+b+c *para :*
1º *a*=(—26), *b*=(+48), *c*=(—14)?
2º *a*=(+37), *b*=(—77), *c*=(—72)?
3º *a*=(—84), *b*=(—58), *c*=(+143)?

24a. *Calcular a expressão* a—b+c, *para os valores do Nº* **23**a.
25a. *Calcular a expressão* b+c—a, *para os valores do Nº* **23**a.
26a. *Qual é o valor da expressão* a—b+c—d, *para :*
1º *a*=(+4), *b*=(—7), *c*=(+9), *d*=(—11)?
2º *a*=(—25), *b*=(—38), *c*=(+43), *d*=(+74)?
3º *a*=(+134), *b*=(+128), *c*=(—379), *d*=(—591)?
27a. *Calcular a expressão* a+b—c+d, *para os valores do Nº* **26**a.
28a. *Calcular a expressão* b—a—c—d, *para os valores do Nº* **26**a.

Multiplicar os numeros seguintes :

29a. (+5) . (—14).
30a. (—7) . (+12).
31a. (—11) . (—3).
32a. (+7) . (—5) . (+2).
33a. (—4) . (—6) . (—3).
34a. (—9) . (+2) (—1).
35a. (+8) . (—3) . (+2).
36a. (—24) . (+5) . (—7).
37a. (—30) . (—4) . (—5).
38a. (+42) . (—21) . (—10).
39a. *Qual é o valor da expressão* (a+b)×c, *para :*
1º *a*=+3, *b*=—2, *c*=+7?
2º *a*=—5, *b*=+4, *c*=—3?
3º *a*=+7, *b*=—3, *c*=—6?
40a. *Calcular a expressão* (a+c)×b, *para os valores do Nº* **39**a.
41a. *Mesmo calculo para* (b+c)×a.

Efetuar os calculos indicados :

42a. (+4—2+5)(—3+6).
43a. (—1+3—4)(+7—5).
44a. (+5—2+3—1)(+4—1).
45a. (—10+3)(+5—1)+(—5+2)(+7—4).
46a. (+8—2+9)(—4+2)+(—5—4+3)(+5—2).

Para : 1º *a*=—2, *b*=4, *c*=—5, *d*=3;
2º *a*=+5, *b*=—3, *c*=+2, *d*=—4;
3º *a*=+4, *b*=—7, *c*=—1, *d*=+6,

calcular :

47a. (*a*+*b*)×(*c*+*d*).
48a. (*a*+*b*—*c*)×*d*.
49a. (*a*—*b*+*c*—*d*)×(*a*+*b*).
50a. (*a*+*b*—*c*+*d*)×(*b*—*c*).
51a. (—*a*+*b*+*c*—*d*)×(*a*+*c*).
52a. (*a*—*b*—*c*+*d*)×(*c*—*d*).
53a. (—*a*—*b*+*c*+*d*)×(*d*—*a*).
54a. (*a*+*b*—*c*—*d*)×(*a*+*d*).

Dividir os numeros seguintes :

55a. (+30) ÷(+5).
56a. (—20) ÷(+2).
57a. (+15) ÷(—3).
58a. (—16) ÷(—4).
59a. (+378)÷(—27).
60a. (—150) ÷(—25).
61a. (+3250)÷(—125).
62a. (—1752)÷(+24)
63a. (+4617)÷(—243).
64a. (—3675)÷(—175).

Efetuar as operações indicadas :

65a. (12+27—36+54+96)÷(—3).
66a. (25—40+35—205—10)÷(—5).
67a. (—35+142—49—72+210)÷(—7).

68a. $(+45-18+108-27+360)\div(-9)$.
69a. $(5-7)(-9+12)\div(+2)$.
70a. $(-4+9-36)(+5-3)\div(-2)$.
71a. $(10-3+11)(8-5+7)\div(-9)$.
72a. $(5-7-4)(3-7-9)\div(-6)$.
73a. $(-5)^3$.
74a. $(-7)^2$.
75a. $(-4)^4$.
76a. $(-5)^2$.
77a. $(2)^2\times(-3)^2$.
78a. $(-3)^3\times(-1)^4$.
79a. $(-1)^3\times(5)^2$.
80a. $(+2)^4\times(-1)^3$.
81a. $(-3)^3 \cdot (-1)^3$
82a. $(5)^2 \cdot (5)^4$.
83a. $(-4)^3 \cdot (-4)^1$
84a. $(-2)^5 \cdot (-2)^3$.
85a. $(+2)^2 \cdot (+2)^3-(-3)^2 \cdot (-3)^3$.
86a. $(-5)^2 \cdot (-5)+(-1)^2 \cdot (-1)^5$.
87a. $(-4)^2 \cdot (-4)^3-(-2)^3 \cdot (-2)+(-1)^3 \cdot (-1)$.
88a. $(+3) \cdot (+3)^2+(-5) \cdot (-5)^3-(2)^2 \cdot (2)$.
89a. $(-1)^4 \cdot (-1)^5+(2) \cdot (2)^5-(-3)^2 \cdot (-3)$.
90a. $(-6)^2 \cdot (-6)-(5)^2 \cdot (5)+(-4)^3 \cdot (-4)$.
91a. $6^7\div 6^6$.
92a. $(-4)^{13}\div(-4)^2$.
93a. $(-5)^7\div(-5)^4$.
94a. $(-8)^{12}\div(-8)^{10}$.
95a. $(+7)^4\div(+7)^2$.
96a. $(-9)^5\div(-9)^3$.

Simplificar as frações seguintes:

97a. $\frac{-27}{36}$.
98a. $\frac{105}{-30}$.
99a. $\frac{-248}{-120}$.
100a. $\frac{342}{-546}$.
101a. $\frac{-276}{+432}$.
102a. $\frac{-549}{-603}$.

Somar ou subtrair as frações seguintes:

103a. $\frac{-3}{3}+\frac{5}{6}+\frac{-4}{12}$.
104a. $\frac{7}{8}+\frac{-3}{12}-\frac{-7}{18}$.
105a. $-\frac{4}{5}-\frac{-7}{20}+\frac{32}{40}$.
106a. $\frac{-12}{60}-\frac{-15}{70}+\frac{23}{80}$.
107a. $\frac{32}{75}+\frac{-40}{125}-\frac{-50}{250}$.
108a. $\frac{13}{25}-\frac{-14}{35}-\frac{-18}{75}$.

Multiplicar ou dividir as frações seguintes e simplificar os resultados:

109a. $\frac{-27}{35}\times\frac{-12}{9}$.
110a. $\frac{42}{18}\times\frac{-24}{72}$.
111a. $\frac{-35}{60}\times\frac{-12}{21}\times\frac{-5}{30}$.
112a. $\frac{-54}{54}\div\frac{5}{9}$.
113a. $\frac{27}{65}\div\frac{-9}{5}$.
114a. $\frac{-32}{55}\times\frac{-12}{8}\div\frac{-35}{11}$.

Problemas sobre os números algébricos.

115a. A distância de Rio a São Paulo é de 498 km.; de São Paulo a Barra do Pirai, ha 390 km.; da Barra do Pirai a Taubaté, ha 234 km. A que distância do Rio fica o viajante que percorreu o itinerário Rio-São Paulo-Barra do Pirai-Taubaté?

116a. Da Santos a Ribeirão Preto, ha 498 km.; de Ribeirão Preto a Campinas, ha 314 km.; de Campinas a São Paulo, ha 105 km. A que distância fica de São Paulo um viajante que percorreu o itinerário Santos-Ribeirão Preto-Campinas-São Paulo?

117a. Um viajante percorreu o itinerário Rio-Itararé-São Paulo-Ponta Grossa-União da Victória-Santa Maria-Porto Alegre-Marcellino Ramos. A que distância fica do Rio, sabendo que ha 952 km. do Rio a Itararé, 434 km. de Itararé a São Paulo, 687 km. de São Paulo a Ponta Grossa, 263 km. de Ponta Grossa a União da Victória, 905 km. de União a Santa Maria, 389 km. de Santa Maria a Porto Alegre e 925 km. de Porto Alegre a Marcellino Ramos?

118a. Dois trens têm as velocidades respetivas de 69 km. e 70 km. por hora. Andam em sentido contrário sobre duas linhas paralelas e cruzam-se num ponto que servirá de origem. Qual distância os separará 2 h. depois do encontro?

119a. Um jogador perde 5$ na 1.ª partida, ganha 3$ na 2.ª e 7$ na 3.ª; na 4.ª, perde ainda 5$ e ganha 2$ na 5.ª. Ao todo, quanto ganhou ou perdeu?

120a. Dois jogadores começam com 150$ cada um e fazem 4 partidas. O 1.º ganha 50$, depois 100$ e perde em seguida 75$ e 45$. O 2.º perde 25$ e 150$, depois ganha 15$ e 65$. Ao todo quanto ganhou ou perdeu cada um e qual é seu dinheiro ao retirar-se?

121a. Um negociante tem 12:850$ em caixa; recebe 1:850$ de vendas no balcão, 2:500$ de letras cobradas e 3:000$ de um correspondente. Paga 3:500$ por letras devidas e 2:870$ por compras a dinheiro. Qual é o novo estado da caixa?

122a. Um negociante é credor pelas quantias seguintes: 428$500, 945$700, 1:832$750 e 243$100; deve: 524$, 839$650 e 1:354$200; tem em caixa 12:500$; quanto terá depois de arrecadar os seus creditos e pagar os seus debitos?

123a. Num 1.º liquido, um termómetro marca 25º e num 2.º, −8º. Qual é a diferença de temperatura dos dois liquidos?

124a. Quando são 12 h. de tempo exato em Paris, são 11 h. 50 m. 14 s. em Londres, 14 h. 20 m. 55 s. em Moscou, 6 h. 54 m. 38 s. em Nova York, 8 h. 57 m. 33 s. no Rio de Janeiro e 19 h. 36 m. 33 s. em Pekin. — Qual é a hora exata de Londres, Paris, Moscou, Pekin e Nova York quando é meio-dia no Rio de Janeiro?

125a. O dia 1.º de janeiro de 1925 do calendario juliano corresponde a 14 de janeiro do calendario gregoriano. Quais são as datas julianas correspondentes a 18 de fevereiro, 25 de março, 2 de maio e 5 de agosto do calendario gregoriano?

126*a*. Na linha X'X, um móvel anda com a velocidade de ± 25 km. por hora, durante ± 4 horas. Qual é o espaço percorrido ?

127*a*. Um móvel anda a partir do ponto O sobre a linha X'X, durante ± 5 horas, percorreu o espaço de ±100 km., qual é sua velocidade ?

CAPITULO PRIMEIRO

GENERALIDADES

I. Emprego de letras.

1. **Fim da algebra**. — *Algebra* é a ciencia que *resolve* e *generaliza* os problemas sobre os números.

É uma *aritmética universal*, segundo Newton ; é uma *aritmética generalizada*.

Para isso a algebra representa os números pelas letras do alfabeto :

$$a,\ b,\ c,\ d\ldots\ldots,\ x,\ y,\ z,\ u,\ e.$$

Se varios numeros são representados pela mesma letra, marca-se esta letra por sinais particulares chamados *indices*. Assim as expressões :

$$a',\ a'',\ a''',\ a^{\text{IV}},\ a^{\text{V}},\ a^{\text{VI}},\ldots\ldots,$$
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ldots\ldots,$$

exprimem numeros distintos. As primeiras lêm-se :

a linha, a duas linhas, a três linhas, a quatro linhas,..., e as segundas,

a indice um, a indice dois, a indice tres...

II. Sinais algébricos.

2. **Adição e subtração**. — Os sinais da adição e da subtração são os mesmos que na aritmética. Assim $a+b$ representa a soma dos números a e b, e $a-b$, sua diferença.

Os números precedidos do sinal— são *negativos* ou *subtrativos* e os outros são *positivos* ou *aditivos*.

3. **Multiplicação**. — O produto de dois números a e b representa-se indiferentemente por

$$ab,\ a.b,\ a\times b.$$

A expressão $abcd$ é pois identica ás seguintes :

$$a.\ b.\ c.\ d \quad \text{e} \quad a\times b\times c\times d.$$

4. **Divisão**. — Indica-se a divisão de a por b escrevendo

$$\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad a\div b.$$

Estas expressões lêm-se respetivamente : *a sobre b* e *a dividido por b*.

5. **Desigualdade**. — Os sinais da desigualdade são $>$ e $<$; lêm-se : *maior do que* e *menor do que*.

Para indicar que dois números a e b são desiguais, escreve-se :

$$a>b \quad \text{ou} \quad a<b,$$

conforme a fôr o maior ou o menor dos dois numeros.

6. **Igualdade**. — O sinal da *igualdade* é =, que se pronuncia *iguala*. Põe-se entre duas quantidades de mesmo valor numérico. A expressão

$$a=b$$

é uma igualdade.

Numa igualdade, tudo quanto fica antes do sinal = é o *primeiro membro*, e tudo quanto fica depois deste sinal, é o *segundo membro*.

7. **Radical**. — Para indicar a extração da rais de um número, cobre-se este número com o sinal $\sqrt{\ }$ chamado *radical* ; no ângulo deste sinal, põe-se um número chamado *indice* da rais, que indica *que espécie de rais se deve extrair*. Assim as expressões

$$\sqrt[3]{a},\quad \sqrt[5]{a^2b},\quad \sqrt[12]{c^5},$$

representam respetivamente *a rais cubica de a, a rais quinta de* a^2b *e a rais duodecima de* c^5. A rais quadrada de um número a representa-se sem índice por $\sqrt{a}$.

8. **Coeficiente**. — *Coeficiente* é um número posto á esquerda de uma quantidade ; indica quantas vezes esta quantidade se toma como parcela.

Segundo a definição, temos :

$$5a=a+a+a+a+a$$

e

$$\frac{3a}{4}=\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a}{4}.$$

9. **Expoente.** — *Expoente* é um número posto á direita e acima de uma letra ; exprime quantas vezes o número representado por esta letra se toma como factor.

Disto resulta que

$$a^5=a.a.a.a.a.$$

Do mesmo modo, póde-se escrever :

$$5a^3b^2c=5.\ a.a.\ a.\ b.\ b.\ c.$$

As expressões a^2, a^3, a^4, a^5..., a^m, lêm-se respetivamente : *a dois, a tres, a quatro, a cinco,... a potencia m.*

III. Expressões algébricas.

10. **Expressão algébrica.** — *Expressão algébrica* é a indicação de operações a efetuar sobre letras. Assim as expressões

$$a+b,\quad 3a^2b,\quad \frac{a}{b},\quad \sqrt[3]{a^4-b^4},$$

são expressões algébricas.

11. **Termo.** — *Têrmo* é toda expressão algébrica cujas partes não são reunidas por um dos sinais + au —. Assim, na expressão algébrica

$$a-b+15a^5b^2x^3-7a^2b^3x^2+9ab^2x-1$$

ha seis termos que são :

$$a,\quad -b,\quad +15a^5b^2x^3,\quad -7a^2b^3x^2,\quad +9ab^2x,\quad -1$$

12. **Monómio.** — *Monómio* é uma expressão algébrica de um só têrmo, como :

$$a,\quad a^5x^4,\quad \frac{4a}{9},\quad -\frac{6a^3b^2c}{5(a+b)}$$

13. **Polinómio.** — *Polinómio* é toda expressão algébrica de mais de um têrmo. Entre os polinómios distinguem-se o *binómio*, que tem dois termos; o *trinómio*, que tem tres termos. Assim, as expressões seguintes :

$$a+b,\quad a^2+2ax+x^2,\quad x^3-3ax^2+3a^2x-a^3,$$

são polinómios. O primeiro é um binómio e o segundo é um trinómio.

IV. Polinómios inteiros em X.

14. **Polinómio inteiro em** x. — *Um polinómio em* x *é inteiro* em relação a esta letra quando todos os expoentes de x são *inteiros* e *positivos* e esta letra não figura nem em denominador nem debaixo de um radical.

O polinómio $45a^2x^3-13b^2x+8a^3b^2-1$ é **inteiro em** x; ao passo que as expressões seguintes não o são :

$$\frac{45a^2}{x^2}-13b^2x,\quad 45a^2x^{-2}-9a^3x^4+1,\quad 67a^2x^2+43a^3\sqrt{x}.$$

15. **Gráu de um termo inteiro em** x. — *Gráu* de um termo inteiro em x é o *expoente* de x neste termo. Os gráus dos termos seguintes,

$$a^2x,\quad a,\quad x^4,\quad 15a^3x^2,\quad \frac{11x^3}{7},\quad \frac{ax^5}{b},\quad ax^m,$$

são respetivamente

$$1,\quad 0,\quad 4,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad m.$$

16. **Gráu de um polinómio inteiro em** x. — O gráu de um polinómio inteiro em x é dado pelo maior expoente de x neste polinómio. Assim, o polinómio seguinte :

$$4a^2x^4-3a^4x^3+2a^5x^2-ax+11,$$

é do *quarto* gráu.

17. **Ordenação dos polinómios.** — *Ordenar um polinómio* é dispôr seus termos de modo que os expoentes de uma de suas letras vão crescendo ou decrescendo. Assim, o polinómio

$$ax^2-bx^4+1+cx^3+dx^6-x^5,$$

ordenado em relação a x, toma as duas formas seguintes :

$$dx^6-x^5-bx^4+cx^3+ax^2+1,$$
$$1+ax^2+cx^3-bx^4-x^5+dx^6.$$

No primeiro caso, o polinómio é ordenado em relação ás potências decrescentes de x, e no segundo, é ordenado em relação ás potências crescentes desta letra.

A letra em relação á qual se ordena um polinómio chama-se *letra ordenadora, ordenatriz* ou principal.

V. Termos semelhantes.

18. **Definição.** — Termos *semelhantes* são os formados pelas mesmas letras afetadas dos mesmos expoentes sejam quais fôrem os coeficientes. As expressões :

$$7a^2, \quad -11{,}25a^2, \quad \frac{12a^2}{5}, \quad a^2\sqrt{3},$$

são quatro termos semelhantes.

19. **Redução de termos semelhantes.** — Reduzir termos semelhantes é reuni-los num só termo. Para isso: 1.º *somam-se os coeficientes dos termos semelhantes positivos;* — 2.º *somam-se os coeficientes dos termos semelhantes negativos;* — 3.º *subtrai-se a menor soma da maior, e dá-se ao resto o sinal da maior.*

Assim, no polinómio

$$11a^3-9a^3+a^2+7a^3-a-5a^3+3a^2+2a^3+4a-1,$$

a^3 deve ser tomado $11-9+7-5+2=6$ vezes,

a^2 deve ser tomado $1+3=4$ vezes,

a deve ser tomado $4-1=3$ vezes.

De sorte que o polinómio proposto reduz-se a

$$6a^3+4a^2+3a-1.$$

VI. Valor numérico das expressões algébricas.

20. **Definição.** — *Valor numérico* de uma expressão algébrica é o valor que toma esta expressão quando se substituem as letras pelos números que representam.

Seja achar o valor numérico de

$$a^3-3a^2x^2y^2+3ax^4y^4-x^6y^6,$$

sabendo que $a=10$, $x=2$, $y=1$.

Substituindo cada letra por seu valor, temos para o valor numérico do polinómio:

$$10^3-3.10^2.2^2+3.10.2^4-2^6=1000-1200+480-64=216.$$

EXERCICIOS

Mostrar a diferença que ha entre as expressões seguintes

1. 3.4 e 3^4
2. $5a$ e a^5
3. ma e a^m
4. $2(a+b)$ e $(a+b)^2$

Lêr as expressões seguintes:

5. a^3, a^7
6. $a^2b^4c^3$
7. $\sqrt{a^3}$
8. $\sqrt[3]{-a^5}$, $\sqrt{a^4}$
9. ma^n, a^mb^p
10. $\frac{a}{b}$, $\frac{3a^m}{4b^n}$

Definir as expressões seguintes:

11. $5a$
12. $3a/8$
13. a^3
14. $3a^4$

Achar, em relação a x, o gráu de cada uma das expressões seguintes:

15. $4x^3$
16. a^2x^5
17. $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$
18. $a^mx^n-b^nx^{2n}+x^{2n-3}$
19. $11x^7-9x^4+x^2-1$
20. $y^3-4x^4y+4y^3$

Ordenar sucessivamente, em relação a cada letra, os polinómios seguintes:

21. $4a^5x^3-5ax^4+9a^3x^7-4a^4x^2+5x+7$
22. $a^2b^3-a^3b^2+ab^4-a^4b+a^5b^5-a^5+b^5$
23. $5x^6+4x^2-5x^5+3x^4-3x+7x^3-20$

Efetuar a redução dos termos semelhantes:

24. $5-a+3b-4a-2b+7a-4$
25. $x^3-x+3x^2-4x+x^3-5x^2+8x-1$
26. $\frac{a}{2}+3a-\frac{a}{4}+b-\frac{a}{8}+\frac{3b}{2}-\frac{b}{2}$
27. $47-24a+33-52a+67-11a+1$
28. $4a^2-8a^2b^4+7a^2b^2-11a^2-15a^2b^2+7-a^2-4+a^2b^2$
29. $5a^4b^3c+9a^2b^2c-11a^4b^3c+7a^2b^2c+18a^4b^3c-a^2b^2c$
30. $9a^2-b^2+c^2-4b^2+\frac{5c^2}{6}+\frac{4a^2}{7}-\frac{8b^2}{9}-\frac{3c^2}{4}$
31. $x\sqrt{2}-\frac{2xy^3}{3}+x\sqrt{3}+\frac{4xy^3}{3}+14-3x\sqrt{2}-\frac{9xy^3}{5}+20$

Achar os valores numericos dos polinómios seguintes:

1º Para $a=10$, $b=2$, $c=1$;
2º Para $a=5$, $b=1$, $c=2$.

32. $(a+b)^2$
33. a^2+b^2-c
34. $(a+c)^2-10$
35. $a^2-(b-1)^2$
36. $\frac{a^2+b^2}{c^2}$
37. $\frac{a^2-b}{c^2}$
38. $(a+b+c)^2-(a+b)^2$
39. $2a-bc+c+3$
40. $3a^2-4b+5a^2+1$
41. $\frac{3a^2}{4}-\frac{5b^2}{6}+\frac{c^2}{4}-\frac{ab-ac+bc}{3}$

Calcular as expressões seguintes, para $x=3$, $a=2$:

42. $(a-x)^2+9$
43. $x^4-x^3+x^2-x+1$
44. a^4-2a^2+1
45. $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$
46. a^5-5a^4+5a-1
47. $(a-1)^2-(x-2)^2$
48. $4(x-1)^2-8a+(x-1)^2-1$
49. $a^2x^2-3a^2x^2+3ax-1$
50. $(x^2+a^2)(x^2-a^2)-4$
51. $(a+x)x+(x-a)a-ax$

Sabendo que
$a=2, \quad b=3, \quad H=10, \quad S=3, \quad R=2, \quad \pi=3,14$
calcular x nas formulas seguintes :

52. $x=\sqrt{abRS}$
53. $x=\sqrt{a^2+b^2-R^2}$
54. $x=\sqrt[3]{bS^2}$
55. $x=64a^3$
56. $x=2b^2(1+\sqrt{2})$
57. $x=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$
58. $x=\frac{a+b}{2}\times H$
59. $x=\pi ab$
60. $x=\pi(R^2-a^2)$
61. $x=2\pi R$
62. $x=\pi R^2$
63. $x=\frac{1}{3}\pi R^2H$
64. $x=\frac{4\pi R^3}{3}$
65. $x=\frac{1}{3}\pi H(R^2+a^2+Ra)$

CAPITULO II

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO ALGÉBRICAS

21. **Definição.** — *Somar as expressões algébricas* A *e* B *é formar uma 3.ª expressão que tenha um valor numérico sempre igual á soma dos valores numéricos das duas primeiras quando as mesmas letras são substituidas pelos mesmos números nas 3 expressões.*

Subtrair duas expressões algébricas A *e* B *é formar uma 3.ª expressão que tenha um valor numérico sempre igual á diferença dos valores numéricos das 2 primeiras quando as mesmas letras são substituidas pelos mesmos números nas 3 expressões.*

Na adição e subtração algébricas, distinguem-se dois casos :

1.º *Adição e subtração de monómios ;*
2.º *Adição e subtração de polinómios.*

Adição de monómios.

22. **Regra.** — *Para somar vários monómios, é preciso escrevê-los uns depois dos outros com seus sinais, e reduzir os termos semelhantes.*

Sejam os monómios seguintes :

$$5a, \quad b^2, \quad -4a, \quad 9b^2, \quad 15a^2, \quad -11a^2.$$

A soma é evidentemente :

$$5a+b^2-4a+9b^2+15a^2-11a^2,$$

ou, invertendo a ordem dos termos,

$$5a-4a+b^2+9b^2+15a^2-11a^2,$$

e, depois de redução,

$$a+10b^2+4a^2.$$

II. Adição de polinómios.

23. **Regra.** — *Para somar vários polinómios é preciso escrever todos seus termos uns depois dos outros, cada um com seu sinal, e reduzir os termos semelhantes.*

Seja o polinómio $a-b$, ao qual se deve acrescentar outro polinómio $c-d$.

Ao polinómio $a-b$ acrescentando c, acrescenta-se d a mais porque $a-b$ deve ser aumentado só do excesso de c sobre d. A soma $a-b+c$ deve pois ser diminuida de d, e vem a ser :

$$a-b+c-d.$$

Este resultado legitima a regra precedente.

24. Na pratica facilita-se a redução dos termos semelhantes, aplicando a regra seguinte :

Regra. — *Para somar vários polinómios, é preciso escrevê-los uns debaixo dos outros, de modo que os termos semelhantes se correspondam, e fazer, depois, a redução.*

Assim, para somar os tres polinómios

$$6a^2x^2+x^4+a^4-4a^3x-4ax^3+9,$$
$$7ax^3-7a^2x^2+5a^3x+3a^4-x^4-5,$$
$$2a^4-a^3x+2a^2x^2-10ax^3-3x^4-3,$$

é preciso dispô-los como indica o quadro seguinte :

$$\begin{array}{rrrrrr} a^4 & -4a^3x & +6a^2x^2 & -4ax^3 & +x^4 & +9 \\ 3a^4 & +5a^3x & -7a^2x^2 & +7ax^3 & -x^4 & -5 \\ 2a^4 & -a^3x & +2a^2x^2 & -10ax^3 & -3x^4 & -3 \\ \hline 6a^4 & & +a^2x^2 & -7ax^3 & -3x^4 & +1 \end{array}$$

e depois, fazer, a redução dos termos de cada coluna.

Para a primeira coluna da esquerda, diz-se :

$a^4+3a^4+2a^4=6a^4$.

Para a segunda,

$-4a^3x+5a^3x-a^3x=0$.

Para a terceira,

$$6a^2x^2-7a^2x^2+2a^2x^2=a^2x^2$$

e assim por diante. A soma procurada é

$6a^4+a^2x^2-7ax^3-3x^4+1$.

25. **Modo de indicar a adição.** — Para indicar a adição de varios polinómios escreve-se cada um entre parêntesis, e depois, escrevem-se estes parêntesis em seguida uns aos outros, separando-os pelo sinal +. Segundo isto, para indicar a soma dos polinómios

$$a-b+c-d, \quad b-c+d-a, \quad c-d+a-b,$$

escreve-se :

$$(a-b+c-d)+(b-c+d-a)+(c-d+a-b).$$

III. Subtração de monómios.

26. **Regra.** — *Subtrai-se um monómio* b *de uma quantidade* a, *mudando o sinal de* b *e acrescentando esta letra a* a.

Com efeito, segundo a definição aritmética da subtração, a diferença procurada acrescentada a b deve reproduzir a; esta diferença não póde ser senão $a-b$, pois que

$$b+(a-b)=a.$$

Seja ainda subtrair $-b$ de a. A diferença procurada é $a+b$, porque, acrescentando $-b$ a esta expressão, vêm :

$$-b+(a+b)=-b+a+b=a.$$

Daí deduzem-se os corolários seguintes :

Corolário I. — Subtrair $-b$, é acrescentar $+b$, pois temos :

$$a-(-b)=a+b.$$

Corolário II. — Acrescentar $-b$, é subtrair b, porque

$$a+(-b)=a-b.$$

Da regra precedente resulta ainda que :

1º $-(-a)=+a$.
2º $-(+a)=-a$.
3º $+(-a)=-a$.
4º $10-(-20)=10+20=30$.
5º $11a^2b-(-4a^2b)=11a^2b+4a^2b=15a^2b$.

IV. Subtração de polinómios.

27. **Regra.** — *Para se obter a diferença de dois polinómios é preciso mudar os sinais de todos os termos do subtraendo e acrescentá-lo, assim modificado, ao minuendo.*

Seja subtrahir $a-b$ de $c+d$.

A diferença procurada é $c+d-a+b$, porque acrescentando-se $a-b$ a esta quantidade, vem :

$$(c+d-a+b)+(a-b)=c+d.$$

28. **Aplicação.** — *Achar a diferença dos dois polinómios*

$$4a^3-4b^3-2a^2b+3ab^2 \quad e \quad 3a^2b-3ab^2+3a^3-4b^3.$$

Trocam-se os sinais do segundo polinómio, que vem a ser :

$$-3a^2b+3ab^2-3a^3+4b^3,$$

e acrescenta-se este polinómio ao primeiro. Obtem-se :

$$4a^3-4b^3-2a^2b+3ab^2-3a^2b+3ab^2-3a^3+4b^3,$$

e, depois de redução :

$$a^3-5a^2b+6ab^2.$$

E' a diferença procurada.

29. **Regra.** — Quando os dois polinómios têm termos semelhantes, na prática, observa-se a regra seguinte :

Para se obter a diferença de dois polinómios que têm termos semelhantes, mudam-se todos os sinais do polinómio a subtrair ; depois somam-se estes dois polinómios, colocando-os um debaixo do outro de modo que os termos semelhantes se correspondam ; afinal faz-se a redução.

Assim, para subtrair o polinómio $-4a^2b^2+a^4+6a^3b-4b^4+4ab^3$ de $a^4+7a^3b-4a^2b^2+2ab^3-3b^4$, mudam-se os sinais do primeiro para acrescentá-lo ao segundo polinómio, como indica o quadro seguinte :

$$\begin{array}{r} a^4+7a^3b-4a^2b^2+2ab^3-3b^4 \\ -a^4-6a^3b+4a^2b^2-4ab^3+4b^4 \\ \hline a^3b \qquad\quad -2ab^3+b^4 \end{array}$$

Depois de redução, acha-se a diferença

$$a^3b-2ab^3+b^4$$

Observação. — Para indicar que uma expressão algébrica se deve subtrair de outra, é preciso escrevê-la entre parêntesis e fazê-la preceder do sinal —.

Assim para indicar que o polinómio $a-b+c-d$ se deve subtrair de P, escreve-se :

$$P-(a-b+c-d).$$

EXERCICIOS SOBRE A ADIÇÃO E A SUBTRAÇÃO

Somar os monomios seguintes e reduzir :

66. $3a,\ 5b^2,\ -7a,\ 4b,\ -4b^2,\ 1.$

67. $4x,\ -3y,\ 2z,\ -\frac{2x}{3},\ \frac{y}{3},\ 3y,\ -4z,\ 2.$

68. $x^3,\ -x^2,\ x,\ -1,\ x^4,\ x^2,\ x^3,\ -x,\ 1.$

69. $4a^2b,\ 6a^2b^2,\ -3a^2b,\ 7a^2b^2,\ 6a^3b^2,\ -7.$

70. $\frac{x}{2},-\frac{x}{3},\ \frac{x}{4},-\frac{x}{5}.$

71. $\frac{3x^2}{4},\ -\frac{2x^3}{3},\ -\frac{4x^2}{5},\ \frac{x^3}{2}.$

Somar os polinómios seguintes :

72. $a+b-c,\quad a-b+c.$

73. $a+b+c,\quad a+b-c,\quad a-b+c,\quad b+c-a.$

74. $10a-3b+7c,\quad 9a+5b-4c.$

75. $9a^2-4ab+3b^2-1,\quad 7a^2+9ab-4b^2+2.$

76. $4x^4-3x^3+2x^2-x+1,\quad \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+1$

77. $5a^3-7a^2b^2+9ab^3-b^4+1,$
$7a^2b^2-4a^3b+2b^4-8ab^3+6.$

78. $\frac{4a}{5}-\frac{3b}{4}-\frac{2c}{3}-4a^2-12,$

$\frac{7b}{8}-\frac{6a}{7}+\frac{3a^2}{2}-\frac{4c}{3}+\frac{25}{2}$

79. $(a^2+2ax+x^2)+(a^2-2ax+x^2)-2(a^2+x^2)$
$(a^2-4ax+4x^2)-(a^2+4ax+4x^2)+12ax.$

Sabendo que :

$A=a+b+c\quad C=a+b-c$
$B=a-b+c\quad D=b+c-a$

formar as expressões seguintes :

80. A+B

81. A+D

82. B+C

83. C+D

84. A+B+C

85. B+C+D

86. A+C+D

87. A+B+C+D

Somar os polinómios seguintes :

88. $x^2-2xy+y^2-2yz+z^2$
$x^2+2xy-z^2-y^2-2yz$
$z^2-2xz-2yz+2xy$

89. $-4x^3+3x^2-7x+1$
$3-4x^2+7x^3+6x$
$4x^3+6x-4+4x^2$

90. $x^3-3a^2x^2+3a^4x$
$3a^2x^2+x^3+3a^4x$
$-2x^3+4a^2x^2-6a^4x$

91. $b+b^2-15-2a$
$3a^2+4b-b^2+ab$
$1-5ab+4a^2+2a$

92. ax^3+bx^2+cx+d
bx^3+cx^2+dx+a
cx^3+dx^2+ax+b
dx^3+ax^2+bx+c

93. $4x^3-6x^2+3x-2$
$6x^3-3x^2+2x-4$
$3x^3-2x^2+4x-5$
$2x^3-4x^2+6x-3$

94. $-9x^3+8x^2-7x+6$
$8x^3+6x-7x^2+10$
$-10x-9+6x^2-7x^3$
$-7x^2-5x^3+11x-7$

Efetuar as operações seguintes e reduzir :

95. $a-(-a)$

96. $(a+b)-(a-b)$

97. $40-(-30)$

98. $a-(a-b)$

99. $a^2-(-4a^2)$

100. $1-(1-a)$

101. $(a+b+c+d)-(a-b+c-d)$

102. $(a-b+c-d)-(b-a-c+d)$

103. $(4a-20)-(3a-40)$

104. $(a+1)+(3a-4)-(2a-16)$

105. $(a-b)-(a+b)-(b-a)$

106. $x^2-y^2-(x^2+y^2-2xy)$

107. $(a-b)+(b-a)-(a+b)-(b-a)$

108. $(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$

109. $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

110. $(x-y)-(y+z-v)+(v+y-z)+(2y-x)$

111. $x^2-(y^2-z^2)+b^2-(x^2+z^2)+y^2-(x^2+y^2)$

112. $(x+2y-5z)-[3y-(6x-6y)+6z]$

113. $(a+b-c)-(a-b+c)+(b-a+c)-(c-a-b)$

114. $a-[b-(c-d)]-[a-(b-c)]+[a-(d-a-b-c)]$

115. $(5a^3+3a^2-2a-4)-(3a^3-2a^2+3a+3-4a^3+5a+7)$

116. $a+[(b-a)-(b-c)]-[(a-c)-(c-a)]-(a-b-c)$

117. $(5y^2-3xy+2x^2)-(5y^2-6xy)-9x^2$

118. $55x-[82a-(8b+3a-6x)-(3x+5ab-4b)]$

119. $\left(\frac{a^4x}{2}-\frac{3a^3x^2}{4}+\frac{5a^2x^3}{8}\right)-\left(\frac{5a^2x^3}{8}-\frac{3a^3x^2}{4}-\frac{2a^4x}{2}\right)$

120. $(x^4-x^3+x^2-x+1)-(x^3+x^4+x^2+1)-(x^3+x-x^5$

121. $\left(-\frac{x^4}{3}+\frac{x^3}{2}-x^2+2\right)-\left(-\frac{x^4}{6}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{3}+1\right)$

Sabendo que :

$A=a+b+c\quad C=a+b-c$
$B=a-b+c\quad D=b+c-a$

calcular as expressões seguintes :

122. A+B−C

123. A+B−D

124. A−D+C

125. B+C−D

126. A−B+C

127. A+D−C

128. A−D−C

129. (A+B)−(C+B)

130. A−B+C−D

131. A+B+C+D

132. B−C−D−A

133. A−B−C+D

134. A−(B+C+D)

135. (A+B)−(C+D

Sabendo que :

$A=a^3-2a^2b+ab^2-2b^3$ $\qquad$ $C=4a^2b+ab^2-4b^3$

$B=2a^2+3ab+2b^2$ $\qquad$ $D=3a^3-4a^2b-3ab^2-4b^3$

calcular as expressões seguintes :

136. A—B $\qquad$ **142.** C—B—A

137. A—D $\qquad$ **143.** (A+B)—(C+D)

138. C—D $\qquad$ **144.** (A—B)—(C—D)

139. A—B+C $\qquad$ **145.** A+B+C+D

140. A—C+D $\qquad$ **146.** A—B+C—D

141. B—C+D $\qquad$ **147.** A—(B+C+D)

Resolver os problemas seguintes :

148. Num passeio uma pessôa deu $a+40$ passos para ir e $2a-1300$ para voltar. Num segundo passeio deu ao todo $3a-3260$ passos menos do que na primeira vez. Quantos passos deu neste ultimo passeio?

149. Faz 10 annos, a idade de um homem era a. Quantos anos terá daqui a 5 anos ? Daqui a 10 anos ? Quantos anos têm agora e quantos tinha faz 15 anos ?

150. Un número iguala $2a-b+2$; qual é o número que o excede de $a+b-2$ e qual é aquêle que lhe é inferior de $2a+b-4$?

151. Um operário ganha num dia a quantia a e gasta b ; no dia seguinte, ganha $2a-b$ e gasta $b-4$. Quanto economizou nestes dois dias ?

152. A idade de um menino é a ; a do irmão é o dobro menos 5 anos, e a do pai é a soma das idades dos dois meninos mais 15 anos. Quais são as idades destas tres pessôas e qual é a soma de suas idades ?

153. Repartiu-se uma quantia entre tres pessôas. A 1.ª recebeu $a+b-c-d$; a 2.ª recebeu $a-c$ menos do que a 1.ª, e a 3.ª, $b+d$ mais do que a 2.ª. Quais são as tres partes e a quantia total ?

154. Dois jogadores A e B decidiram que o que perdesse duplicaria o haver do que ganhasse. A perde a 1.ª partida e a 3.ª e ganha a 2.ª. Depois disto qual é o haver de cada jogador, se antes de começar o 1.º tinha a e o 2.º b ?

CAPITULO III

MULTIPLICAÇÃO ALGEBRICA

I. Preliminares.

30. **Definição.** — *Multiplicar duas expressões algébricas A e B é formar uma 3.ª expressão que tenha um valor numérico sempre igual ao produto dos valores numéricos das duas primeiras quando as mesmas letras são substituidas pelos mesmos numeros nas 3 expressões.*

31. **Regra dos sinais.** — *Dois números de mesmo sinal têm produto positivo; dois números de sinais contrarios têm produto negativo.*

Esta regra é deduzida do produto de uma diferença por outra diferença ; repetimos aqui esta multiplicação já realizada na aritmética *(curso superior, Nº 67)*.

Seja multiplicar a diferença $a-b$ pela diferença $c-d$.

Multiplicar $(a-b)$ por $(c-d)$ é repetir a quantidade $(a-b)$ primeiro c vezes, depois, menos d vezes.

Ora, c vezes $(a-b)$ ou $(a-b)c=ac-bc$, $\qquad$ (1)

porque a aritmética ensina que para se multiplicar uma diferença, basta multiplicar o minuendo e o subtraendo e depois subtrair os resultados.

Tambem, d vezes $(a-b)$ ou $(a-b)d=ad-bd$. $\qquad$ (2)

Subtraindo membro a membro as igualdades (2) e (1), temos : c vezes $(a-b)-d$ vezes $(a-b=ac-bc-(ad-bd)=ac-bc-ad+bd$.

Portanto, $\qquad (a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd.$

Examinando os sinais, vemos que :

$$(+a)\times(+c)=+ac,$$
$$(-b)\times(+c)=-bc,$$
$$(+a)\times(-d)=-ad,$$
$$(-b)\times(-d)=+bd.$$

EXEMPLOS : $\quad$ 1º $10\times(-5)=-50$,

2º $(-5)\times(+6)=-30$,

3º $(-7)\times(-4)=+28$.

Observação. — Ha quatro casos na teoria da multiplicação algébrica :

1.º *Produto de duas potências da mesma letra ;*

2.º *Produto de dois monómios ;*

3.º *Produto de um polinómio por um monómio ;*

4.º *Produto de dois polinómios.*

II. Produto de duas potências da mesma letra.

32. **Regra.** — *Para se obter o produto de duas potências da mesma letra :*

1.º *Observa-se a regra dos sinais ;*

2.º *Dá se à letra um expoente igual à soma dos expoentes das duas potências dadas.*

Sejam a^4 e a^5 duas potências de a ; o produto a^4. a^5 contem

4+5 factores iguais a a; portanto, segundo a definição do expoente, este produto é

$$a^4.a^5=a^{4+5}=a^9.$$

Em geral, seja multiplicar a^m e a^n.

Segundo a definição do expoente, temos:

$a^m=a.a.a.a...$ (m factores).

$a^n=a.a.a.a.a...$ (n factores).

Multiplicando membro a membro, vem:

$a^m.a^n=a.a.a...\times a.a.a.a.$ (1)

O 2º membro da igualdade (1) consta de $m+n$ factores iguais a a e vale a^{m+n}.

Logo: $$a^m.a^n=a^{m+n}.$$

Aplicações. — Segundo as regras precedentes (31 e 32), póde-se escrever:

1º $6^3.6^5=6^8.$

2º $-a^2.a=-a^3.$

3º $a^{14}.a^6=a^{20}.$

4º $x^{m+1}.x^{n-m-1}=x^n.$

III. Produto de dois monómios.

33. **Regra.** — Para se obter o produto de dois monómios:

1.º *Observa-se a regra dos sinais;*

2.º *Multiplicam-se os coeficientes;*

3.º *Escrevem-se as diferentes letras, cada uma com a soma de seus expoentes.*

Sejam os dois monomios $7a^4b^3d$ e $9a^6bc^3d^2$. Para se obter o produto, basta multiplicar entre si todos os factores que os compõem. Temos:

$$7a^4b^3d\times 9a^6bc^3d^2=7a^4.b^3.d.9.a^6.b.c^3.d^2,$$

e, invertendo os factores,

$$7a^4b^3d\times 9a^6bc^3d^2=7.9.a^4.a^6.b^3.b.c^3d.d^2.$$

Emfim, aplicando a regra da multiplicação de duas potências da mesma letra (32) temos definitivamente:

$$7a^4b^3d\times 9a^6bc^3d^2=63a^{10}b^4c^3d^3.$$

Se os sinais dos factores fossem contrarios, ou ambos negativos, teriamos:

$$7a^4b^3d\times(-9a^6bc^3d^2)=-63a^{10}b^4c^3d^3.$$
$$(-7a^4b^3d)\times(-9a^6bc^3d^2)=\quad 63a^{10}b^4c^3d^3.$$

34. **Produto de um numero qualquer de monómios.** — *Para se obter o produto de varios monómios, multiplica-se o primeiro monómio pelo segundo; depois multiplica-se o produto assim obtido pelo terceiro monómio e assim por diante.*

Segundo esta regra, o produto

$$(-4a^3b^5)\times 7a^2b^6(-2ab^3),$$

obtem-se multiplicando $-4a^3b^5$ por $7a^2b^6$, o que dá o produto $-28a^5b^{11}$; depois, multiplica-se $-28a^5b^{11}$ por $-2ab^3$. O produto definitivo é, pois, $56a^6b^{14}$.

IV. Potências de um monómio.

35. **Regra.** — *Para se elevar um monómio a uma potência determinada, é preciso elevar a esta potência todos os factores do monómio.*

1º Caso. — Seja elevar á quinta potência o monómio a^3. Temos:

$$(a^3)^5=a^3.a^3.a^3.a^3.a^3.=a^{3\times 5}=a^{15},$$

e, em geral,

$$(a^n)^m=a^{mn}.$$

2º Caso. — Seja elevar ao cubo o monómio positivo $5a^4b^3c^2d$. Temos:

$$(5a^4b^3c^2d)^3=5a^4b^3c^2d.5a^4b^3c^2d.5a^4b^3c^2d.$$

Mas por causa da regra (34), temos ainda

$$(5a^4b^3c^2d)^3=5^3a^{4\times 3}b^{3\times 3}c^{2\times 3}d^3=5^3a^{12}b^9c^6d^3,$$

e, em geral,

$$(ax^my^n)^p=a^p x^{mp}y^{np}.$$

Na pratica, *para se elevar um mónomio a qualquer potência, eleva-se o coeficiente a essa potência multiplicam-se os expoentes de cada letra pelo índice da potência.*

Corolario. — Logo: 1.º *elevando-se qualquer número a uma potência par, o resultado é positivo;* — 2.º *elevando um número negativo a uma potência impar, o resultado é negativo.*

EXEMPLOS: 1º $(-a)^4=a^4.$ 3º $(+a)^5=a^5.$
2º $(-a)^7=-a^7.$ 4º $(+a)^9=a^9.$

EXERCICIOS SOBRE A MULTIPLICAÇÃO DE MONÓMIOS

Efetuar os produtos indicados:

155. $5\times(-2)(-1)$

156. $(-5)\times(-2)\times(-3)$

157. $(-1)\times 2\times(-3)$

158. $(-3)\times 2(-5)\times 4(-7)\times 6$

159. $(-1)^3\times(-1)^4$

160. $(-7)^2\times(-7)^3$

161. $(-10)^4\times(-2)^3$

162. $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)\times 12\times 14$

163. $96\left(-\frac{1}{4}\right)^2\left(5-\frac{25}{2}\right)$

164. $2(-3)^3(-4)^2\times(5+36)$

165. $a^5\times a^7$

166. $a^{14}\times a^5$

167. $(-a)^3\times a^4$

168. $(-a^2)\times a^3\times a^4$

169. $(-a)(-a^3)\times a^5\times a^7$

170. $(-a^2)(-a)(-a^3)$

171. $3x \times 5y$
172. $x^2y^3 \times x^4y^4$
173. $xy(-2xy) \times 3xy$
174. $32a^5b^4c^3d \times 4a^2bc^4f$
175. $-44a^4b^3c^5d^2f \times \frac{1}{4}a^3b^2c^2f^3h$
176. $4a^4b^3c^2(-8a^2b^3c^2x^2y^2 \times 4a^2bc^4x^2y^2)$
177. $(-18x^2y)(-6y^2)x^2y^3$
178. $x^4(-x^5)(-8x^3)(-2x)(-4)$
179. $x^2 \times 2yz(-y^2)(-z^2)(-2xy)$
180. $\left(-\frac{2x^2}{3}\right)\left(-\frac{3x^4}{4}\right)\left(\frac{6x^4}{8}\right)$
181. $15x^4\left(\frac{3x^6}{5}\right)\left(-\frac{8x}{3}\right)$
182. $a^3 \times b^3 \times c^3 \times a^2b^2c^2 \times abc$
183. $-(a+b)^2 \times (a+b) \times (a+b)^3$
184. $-(a-1) \times (a-1)^2 \times (a-1)^5$
185. $3(a-b)^2 \times 5[-(a-b)^5]$
186. $\frac{x}{2} \times \frac{x^2}{3} \times \frac{x^3}{4} \times \frac{x^4}{5} \times 60x^5$

---

187. $(a^2)^2$
188. $(a^3)^3$
189. $(a^5)^2$
190. $(-a)^2$
191. $(-b)^2(-b)^3$
192. $(-a^2)^4$
193. $(-a^2)^2(-a^2)$
194. $(-1)^2$
195. $(-1)^3$
196. $(-1)^3(-1)^4(-1)$
197. $(-a)^2(-a^2)^3$
198. $(2^3.5^4)^2$
199. $(-2^3.5^4)^3$
200. $(4a^2b^3c^4)^2$
201. $(-3a^4b^2c)^3$
202. $(-3a^2b^5c^4d^3f)^5$
203. $\left(\frac{2}{5}a^3b^2c\right)^4$
204. $(-2a^3)^{10}$
205. $(-3a^2)^2 \times (-2a^2)^3$
206. $(-2a^5b^3c^4)^5 \times (-2a^3b^3c^4)^4$
207. $\left(-\frac{2}{3}a^4b^4c^2\right)^3 \times (-2a^2b^3c^4)^2$
208. $(-a)(-a^2)(-a^3)(-a^4)(-a^5)$
209. $2^2 \times (2a)^3 \times \left(-\frac{a^2}{2}\right)^2$
210. $(-ab)^2(-ab)^4(-ab)^6$
211. $\left(-\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{3}{4}a^3\right)^5\left(-\frac{5}{2}a^7\right)^2.24.$
212. $(+a^2)^m$
213. $(-a^m)^2$
214. $(-a^m)(-a^n)(-a^p)$
215. $(-a^mb^nc^p)^3$
216. $(a^2b^3c^4d^p)^m$

PROBLEMAS A RESOLVER

217. Um homem dá a contos de reis ao filho mais velho; ao 2º, dá dez vezes mais; ao 3º, dá 2 vezes mais do que aos dois primeiros juntos; emfim, o 4º recebe tanto quanto o 1º mais 3 vezes quanto o 3º. Quanto recebeu cada um e qual é a quantia repartida?

218. Um numero x excede um número b de 3 vezes este ultimo número e de b — 11. Achar o numero x.

219. As tres arestas de um paralelipipedo retangulo são a, b, c; achar a superfície e o volume deste poliedro.

220. Em um jogo de 56 cartas, tiram-se primeiro a cartas; na segunda vez tira-se n vezes o numero que se tirou na 1ª vez e ainda $a-n$ cartas. Emfim na terceira vez tiram-se tantas cartas quantas já se tiraram. Achar quantas cartas foram tiradas cada vez, e quantas ainda ficam?

CAPITULO IV

MULTIPLICAÇÃO ALGÉBRICA

I. Produto de um polinómio por um monómio.

36. **Regra**. — *Para se multiplicar um polinómio por um monómio, multiplica-se cada termo do polinómio pelo monómio.*

Seja multiplicar o polinómio $a-b+c-d$ pelo monómio m.

Segundo a definição da multiplicação, o multiplicador m quer dizer que devemos repetir o multiplicando m vezes; fazendo isso, vem o quadro abaixo:

$$a-b+c-d$$
$$a-b+c-d$$
$$a-b+c-d$$
. . . .
. . . .

Totalizando por colunas, vem:
$+a$ repetido m vezes dá: am;
$-b$ » m » » $-bm$;
$+c$ » m » » $+cm$;
$-d$ » m » » $-dm$.

O produto é $am-bm+cm-dm$, o que demonstra a exatidão da regra.

Nota. — Quando o monómio é negativo, é preciso ainda observar a regra dos sinais.

Aplicações. — 1.º *Achar o produto de* $a^2-2ab+b^2$ *por* a^2.

Segundo a regra precedente (36), temos:
$$(a^2-2ab+b^2)a^2 = a^2.a^2-2ab.a^2+b^2.a^2 = a^4-2a^3b+a^2b^2.$$

2º *Multiplicar* $a^3-b^2-2d^4$ *por* $-3a^2bc^4d$.

A regra (36) dá
$$(a^3-b^2-2d^4)(-3a^2bc^4d)$$
$$= a^3(-3a^2bc^4d)-b^2(-3a^2bc^4d)-2d^4(-3a^2bc^4d),$$
ou ainda
$$(a^3-b^2-2d^4)(-3a^2bc^4d) = -3a^5bc^4d+3a^2b^3c^4d+6a^2bc^4d^5.$$

37. **Produto de um monómio por um polinómio.** — *Para se multiplicar um monómio por um polinómio, multiplica-se cada termo do polinómio pelo monómio.*

Com efeito, póde-se inverter a ordem de dois factores sem alterar o produto. Assim, temos :

$$(-3a^2)(a^2b^2-a^3b^3+4b^5)=(a^2b^2-a^3b^3+4b^5)(-3a^2)$$
$$=-3a^4b^2+3a^5b^3-12a^2b^5.$$

II. Multiplicação de polinómios.

38. **Regra.** — *Para se multiplicar dois polinómios, multiplica-se cada termo do primeiro por todos os termos do segundo, e faz-se a soma dos resultados.*

Seja multiplicar os polinómios $A=a-b$ e $B=c-d$; teremos:

$$AB=(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+cd.$$

Com efeito, temos (Nº 36) :

$$AB=(a-b)B=aB-bB.$$

Ora, substituindo B por seu valor $c-d$, vem :

$$aB=a(c-d)=ac-ad,$$
$$-bB=-b(c-d)=-bc+bd.$$

Somando membro a membro, vem afinal :

$$aB-bB \text{ ou } AB=ac-ad-bc+bd.$$

Nota. — Na prática, ordenam-se os polinómios em relação á mesma letra e, para facilitar a redução, escrevem-se os termos semelhantes uns debaixo dos outros.

Aplicação. — *Multiplicar* $a^2-2ab+b^2$ *por* $m-n$.

Segundo a regra, é preciso, primeiro, multiplicar $a^2-2ab+b^2$ por m; temos o primeiro produto parcial

$$(a^2-2ab+b^2)m=a^2m-2abm+b^2m.$$

Multiplicando, depois, $a^2-2ab+b^2$ por $-n$, temos o segundo produto parcial

$$(a^2-2ab+b^2)(-n)=-a^2n+2abn-b^2n.$$

O produto procurado é a soma dos dois produtos parciais. Esta soma iguala

$$a^2m-2abm+b^2m-a^2n+2abn-b^2n.$$

39. **Regra prática.** — *Na prática, ordenam-se os dois polinómios do mesmo modo e em relação á mesma letra, e colocam-se um debaixo do outro. Debaixo do multiplicador, escrevem-se os produtos parciais do multiplicando por todos os termos do multiplicador, de modo que os termos semelhantes se correspondam, e faz-se a soma destes produtos.*

Aplicação. — *Seja achar o produto dos dois polinómios*

$$a^2+b^2-2ab \quad e \quad a^2-b^2+4ab.$$

Ordenados em relação ás potências decrescentes de a, os dois polinómios colocam-se segundo a regra, como no quadro abaixo :

$$\begin{array}{l} a^2-2ab+b^2 \\ a^2+4ab-b^2 \\ \hline a^4-2a^3b+a^2b^2 \\ \quad +4a^3b-8a^2b^2+4ab^3 \\ \qquad\quad -a^2b^2+2ab^3-b^4 \\ \hline a^4+2a^3b-8a^2b^2+6ab^3-b^4 \end{array}$$

Para se multiplicar o polinómio $a^2-2ab+b^2$ por a^2, diz-se :

$$a^2\times a^2=a^4 \;;\quad -2ab\times a^2=-2a^3b \;;\quad b^2\times a^2=a^2b^2.$$

O primeiro produto parcial é

$$a^4-2a^3b+a^2b^2,$$

que se escreve debaixo do multiplicador.

Obtem-se o produto de $a^2-2ab+b^2$ por $4ab$ dizendo :

$$a^2\times 4ab=4a^3b,\quad -2ab\times 4ab=-8a^2b^2,\quad b^2\times 4ab=4ab^3\;;$$

e o segundo produto parcial é :

$$4a^3b-8a^2b^2+4ab^3.$$

Escreve-se este polinomio debaixo do produto parcial precedente, e fazem-se corresponder os termos semelhantes.

Emfim, forma-se o terceiro produto parcial pela multiplicação de $a^2-2ab+b^2$ por $-b^2$, dizendo :

$$a^2\times(-b^2)=-a^2b^2,\quad -2ab(-b^2)=2ab^3,\quad b^2\times(-b^2)=-b^4.$$

O produto resultante é

$$-a^2b^2+2ab^3-b^4.$$

Depois de escrevê-lo debaixo dos outros produtos parciais já achados, faz-se a soma destes tres polinómios.

A soma obtida

$$a^4+2a^3b-8a^2b^2+6ab^3-b^4$$

é o produto procurado.

40. **Teorema.** — *Para dois polinomios ordenados do mesmo modo e em relação á mesma letra, o primeiro termo do produto é sem redução, o produto do primeiro termo do multiplicando pelo primeiro termo do multiplicador.*

Sejam os dois polinómios ordenados

$$A=7x^5-11x^4+6x^3-3x^2+x+10.$$
$$B=4x^3-6x^2-x+2.$$

Os termos $7x^5$ e $4x^3$ têm o gráu mais elevado nos dois polinómios; portanto, seu produto, $28x^8$, é o termo de gráu mais elevado no produto AB. O produto do primeiro termo de A pelo primeiro termo de B não sofre, pois, redução alguma.

Corolário. — Daí póde-se concluir que *o gráu de um produto é a soma dos gráus dos factores.*

III. Fórmulas notáveis.

41. **Quadrado de um binómio.** — *O quadrado de um binómio vale:*

1.º *O quadrado do primeiro têrmo;*

2.º *O duplo produto dos dois têrmos;*

3.º *O quadrado do segundo têrmo.*

Com efeito, multiplicando $a+b$ por $a+b$, temos

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad\;\; ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \text{ou } (a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Desta regra se deduz que:

O quadrado da diferença de dois números iguala:

1.º *O quadrado do primeiro número;*

2.º *Menos o duplo produto dos dois números;*

3.º *Mais o quadrado do segundo número.*

Com efeito, multiplicando $a-b$ por $a-b$, temos

$$\begin{array}{l} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab \\ \underline{\quad -ab+b^2} \\ a^2-2ab+b^2 \end{array} \qquad \text{ou } (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Aplicações. — 1.º *Formar o quadrado de $4x^3+5$.*

Segundo a regra precedente temos:

$$(4x^3+5)^2=(4x^3)^2+2.4x^3.5+5^2=16x^6+40x^3+25.$$

2º *Fazer o quadrado de $5x^2-7b^3$.*

Temos:

$$(5x^2-7b^3)^2=(5x^2)^2-2.5x^2.7b^3+(7b^3)^2=25x^4-70b^3x^2+49b^6.$$

42. **Produto da soma de dois números por sua diferença.** — *A soma de dois números multiplicada por sua diferença é igual á diferença dos quadrados dos dois números.*

Com efeito, multiplicando $a+b$ por $a-b$, temos:

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a-b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad -ab-b^2} \\ a^2 \qquad -b^2 \end{array} \qquad \text{ou } (a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Aplicações. — Por causa desta regra podemos escrever:

1º $(5a-3b^2)(5a+3b^2)=(5a)^2-(3b^2)^2=25a^2-9b^4$.

2º $a^2-1=(a+1)(a-1)$.

3º $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

4º $4x^2y^2-64z^4=(2xy+8z^2)(2xy-8z^2)$.

5º $(a+1)^2-a^2=(a+1+a)(a+1-a)=2a+1$.

43. **Cubo de um binómio.** — *O cubo de um binómio iguala:*

1.º *O cubo do primeiro têrmo;*

2.º *Mais o triplo produto do quadrado do 1.º têrmo pelo 2.º;*

3.º *Mais o triplo produto do 1.º têrmo pelo quadrado do 2.º;*

4.º *Mais o cubo do segundo têrmo.*

Com efeito, temos:

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b);$$

e, efetuando esta multiplicação,

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ \underline{a\;\;+b} \\ a^3+2a^2b+ab^2 \\ \underline{\quad +a^2b+2ab^2+b^3} \\ a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array} \quad \text{ou} \qquad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Desta regra se deduz que :

O cubo da diferença de dois números iguala :

1.º *O cubo do primeiro número ;*

2.º *Menos 3 vezes o produto do quadrado do 1.º têrmo pelo 2.º ;*

3.º *Mais 3 vezes o produto do 1.º têrmo pelo quadrado do 2.º ;*

4.º *Menos o cubo do segundo.*

Com efeito, temos :

$$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b).$$

e, efetuando esta operação,

$$\begin{array}{l} a^2-2ab+b^2 \\ \underline{a-b} \\ a^3-2a^2b+ab^2 \\ \underline{\quad -a^2b+2ab^2-b^3} \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{array}$$

ou $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

Aplicações. — Segunda esta regra temos :

1º $(2a^2+5b)^3=8a^6+60a^4b+150a^2b^2+125b^3.$

2º $(5x^3-3y^2)^3=125x^9-225x^6y^2+135x^3y^4-27y^6.$

44. **Outras fórmulas notáveis.**

(1) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$

(3) $(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1=3a(a+1)+1.$

(4) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

(5) $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc$
$+2bd+2cd.$

As fórmulas (1) e (2) provam que a^3-b^3 é divisivel por $a-b$ e que a^3+b^3 o é por $a+b$.

A fórmula (3) mostra que a diferença dos cubos de dois números que diferem da unidade iguala 3 vezes o produto destes números aumentado de 1.

As fórmulas (4) e (5) indicam que o quadrado de um polinómio iguala os quadrados de seus termos mais a soma dos duplos produtos dois a dois de todos os termos.

EXERCICIOS SOBRE A MULTIPLICAÇÃO ALGEBRICA

Efetuar as operações indicadas :

221. $(a+1)a^3$

222. $(-a^2+a-1)(-a^2)$

223. $(4a^3-a^2)a^4$

224. $(1-2xy+5x^2)(-4xy^2)$

225. $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)(-2a^2b^2c)$

226. $(x^m-x^{2m}y+y^n)x^my^n$

227. $(x^3-x^2+x-1)(-x^2)$

228. $(3a+b-4c)7a^3$

229. $(a^4-b^4-a^2b^4)(-ab)$

230. $(11ab-10a^2+8b^2)(-3a^2b^2)$

231. $(15ab^2-3a^2b^2-6a^2b)\times\frac{2}{3}a^2b^2c^4$

232. $7a^2x^2y^2z\left(\frac{ax^2yz}{21}-\frac{a^2xy^2z^2}{56}\right)$

233. $a^2b^2c^2[-(a+b+c)-(ab+ac+bc)-abc]$

Efetuar as operações indicadas :

234. $(a+x)(a+2x)$

235. $(x-1)(x-2)$

236. $(x+10)(x-12)$

237. $(a+b)(x-y)$

238. $(a+b-c)(a-b)$

239. $(x^3-1)(x^4+1)$

240. $(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)$

241. $(b-4a^2+3a^2b)(b-4a^2)$

242. $(5-3a)(6+2a-7b)$

243. $(x^2+y^2-xy)(x^2-y^2+xy)$

244. $(a+b)(a-b)(a-1)$

245. $(2x-1)(1-3x)(1-x)$

246. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

247. $(3x^2y^2-5a^2b^2x^2y)(a^2x-a^2xy$

248. $(a^2b^2c^2-abc-1)(a^2b^2c^2$
$+abc+1)$

249. $x(x-1)-(x-1)(x-2)$

250. $x(x-1)(x+1)-(x-1)^2x$

251. $2x^2(x^2-5)(x^2+5)-2x^6$

252. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$

253. $\left(-6x^2y-\frac{xy^2}{2}+5y^3\right)\left(\frac{2xy}{3}-\frac{y^2}{6}\right)$

Efectuar, depois de ordenar os polinómios ;

254. $(2ab+b^2+a^2)(b^2+a^2-2ab)$

255. $(1+a^2-a-a^3)(a+1-a^2+a^3)$

256. $(a^4+1+a^2+a^3+a)(1-a)$

257. $(-1+a^5+a-a^4-a^2+a^3)(a+1)$

258. $(a^3+3ab^2-3a^2b-b^3)(a^2+b^2-2ab)$

259. $(a^4+b^4+2a^2b^2)(1-a^2+b^2)$

260. $(4ax^2+3a^2x^4-1)(3x^2-1-x^3)$

261. $(4a^4x^4+3a^3x^3-2a^2x^2)(2a^2x^2-3a^2x^2)$

262. $(b^2-4a^2b+4a^4)(4a^4+b^4+4a^2b^2)$

263. $(x^4-x-x^3+x^2+1)(1+x^4-x^2)$

264. $(6x^3-4x^2-4x)(1+x^2+2x)$

265. $(1-2a^3-6a^4+4a^6+8a^5)(5a^5+a-3a^3-7a^7)$

Desinvolver e reduzir :

266. $(x+4)^2$
267. $(x-7)^2$
268. $(a+5)^2$
269. $(2a-1)^2$
270. $(a^2+2)^2$
271. $(a^2+b^2)^2$
272. $(2a^2-3b^3)^2$
273. $(5a^4b-7ab^3)^2$
274. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$
275 $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2$
276. $\left(2a+\frac{1}{4}\right)^2$
277. $(a+1)^2-(a^2+1)$
278. $(a+n)^2-(a^2+n^2)$
279. $(a-b+c)^2$
280. $(2a-3b+4c)^2$
281. $(a-b+c-d)^2$
282. $(2a^2-3b^2+4c^4)^2$
283. $(ma-nb-pc)^2$
284. $(x+1)^2-(x-1)^2$
285. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$
286. $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{25}-1\right)^2$
287. $\left(\frac{3a}{4}-\frac{5a^2}{3}\right)^2$
288. $(x^4-x^2+1)^2$
289. $(4a^2x^3y^4-2ax^2y^5)^2$
290. $(a^2+b^2)a^2(a^2-b^2)b^2$
291. $(a-b)^2(a+b)^2$
292. $(a+1)^3$
293. $(a-1)^3$
294. $(2a+b)^3$
295. $(a-3b)^3$
296. $(x+5)^3$
297. $(4x^2-1)^3$
298. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3$
299. $(a+1)^3-a^3$
300. $(x^2-y^2)^3$
301. $(11x^2-1)^3$
302. $(a+b)^3-(a-b)^3$
303. $(x-1)^3-(x+1)^3$
304. $(a+b)^3-2(a+b)(a-b)^2$
305. $(a+b-c)^3-(a^3+b^3-c^3)$

Achar dois números inteiros consecutivos cuja diferença dos quadrados seja um dos números seguintes :

306. 21 7 63 **307.** 999 99 3

Achar dois números inteiros consecutivos cuja diferença dos cubos seja um dos números seguintes :

308. 91
309. 271
310. 631
311. 1141

Dados os binómios seguintes, acrescentar um termo tal que o trinómio resultante seja um quadrado :

312. a^2+b^2
313. b^2-2ab
314. $4a^2+8a$
315. $16a^2-8a$
316. $1-2a$
317. x^2-10xy
318. $a^2x^4y^2+8axyz$
319. x^2+z^2
320. $1+4x^2$
321. $4a^2+4b^2$
322. $25x^2+100$
323. $\frac{x^2}{4}+1$
324. $9x^2+\frac{1}{4}$
325. $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{25}$

CAPITULO V

DIVISÃO ALGEBRICA

I. Regra dos sinais.

45. **Definição.** — *Dividir uma expressão algébrica A por outra B, é formar uma 3.ª que tenha um valor numérico sempre igual ao quociente dos valores numéricos das 2 primeiras quando as mesmas letras são substituidas pelos mesmos números nas 3 expressões.*

46. **Regra dos sinais.** — *Dois números de mesmo sinal têm um quociente positivo ; dois números de sinais contrários têm um quociente negativo.*

Com efeito, a regra da multiplicação dá :

$$(+a).(+b)=+ab,$$
$$(+a).(-b)=-ab,$$
$$(-a).(+b)=-ab,$$
$$(-a).(-b)=+ab.$$

Como um produto dividido por um factor dá o outro factor, vem :

$$\frac{+ab}{+b}=+a;\quad \frac{-ab}{-b}=+a;$$

$$\frac{-ab}{+b}=-a;\quad \frac{+ab}{-b}=-a.$$

Logo, se o dividendo e o divisor são de mesmo sinal, o quociente é positivo : se o dividendo e o divisor são de sinais contrários, o quociente 7 negativo.

Aplicações. — Aplicando a regra, podemos escrever :

1º $(-10)\div(-5)=2.$
2º $(-10)\div5=-2.$
3º $10\div(-5)=-2.$

Observação. — A teoria da divisão apresenta quatro casos :

1.º *Divisão de duas potências de uma mesma letra ;*
2.º *Divisão de dois monómios ;*
3.º *Divisão de um polinómio por um monómio ;*
4.º *Divisão de dois polinómios.*

II. Divisão de duas potências de uma mesma letra.

47. **Regra.** — *Para se dividir duas potências de uma mesma letra, observa-se a regra dos sinais e dá-se à letra um expoente igual à diferença entre o expoente do dividendo e o do divisor.*

Seja dividir a^8 por a^5. O quociente procurado, multiplicado por a^5, deve reproduzir a^8 e não póde ser senão a^{8-5} ou a^3. Temos, pois :

$$a^8 \div a^5 = a^{8-5} = a^3.$$

E, em geral,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

Aplicações. — Segundo a regra precedente, e dos sinais (46 e 48). Temos :

1º $(-a)^7 \div a^4 = -a^{7-4} = -a^3.$

2º $(-a^8) \div (-a^5) = +a^{8-5} = a^3.$

3º $a^m \div (-a^n) = -a^{m-n}.$

4º $b^9 \div b^4 = b^{9-4} = b^5.$

III. Expoente zero.

48. **Teorema.** — *Toda a quantidade afetada do expoente zero iguala a unidade.*

Segundo a regra (47), o quociente de a^{10} por a^{10} é $a^{10-10} = a^0$; mas a^{10} dividido por a^{10} dá a unidade por quociente ; podemos escrever :

$$a^{10} \div a^{10} = a^0 = 1.$$

Do mesmo modo, temos :

$$a^m \div a^m = a^0 = 1.$$

EXEMPLOS :
1º $9^0 = 1.$
2º $1000^0 = 1.$
3º $(ax^2 + bx + c)^0 = 1.$
4º $3a^0 - 2 + 4b^0 - d^0 = 3 - 2 + 4 - 1 = 4.$

IV. Expoente negativo.

49. **Teorema.** — *Toda a quantidade afetada de um expoente negativo equivale a uma fração tendo por numerador 1 e por denominador esta mesma quantidade com o expoente positivo.*

Devemos ter, por exemplo : $a^{-5} = \frac{1}{a^5}.$

Com efeito, dividamos a^3 por a^8. Segundo a regra (47), temos :

$$a^3 \div a^8 = a^{3-8} = a^{-5} \qquad (1)$$

De outra parte, o quociente de a^3 por a^8 não muda dividindo estas duas quantidades por a^3, e temos :

$$a^3 \div a^8 = \frac{a^3 \div a^3}{a^8 \div a^3} = \frac{a^0}{a^5} = \frac{1}{a^5}. \qquad (2)$$

Por causa das igualdades (1) e (2), podemos escrever :

$$a^{-5} = \frac{1}{a^5};$$

e em geral,

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

EXEMPLOS :
1º $a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$
2º $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}.$
3º $ab^{-2} = \frac{a}{b^2}.$
4º $\frac{4}{a^5} = 4a^{-5}.$

V. Divisão de monómios.

50. **Regra.** — *Para se dividir dois monómios quando a divisão se faz exatamente : 1.º observa-se a regra dos sinais ;*

2.º Dividem-se os coeficientes ;

3.º Escreve-se cada letra do dividendo, com um expoente igual à diferença dos expoentes no dividendo e divisor.

Seja dividir $20a^{m+n}b^tc^v$ por $5a^nb^t$; o quociente será :

$$4a^mc^v.$$

Com efeito, esse quociente multiplicado pelo divisor reproduz o dividendo, o que vem indicado pela identidade :

$$4a^mc^v \times 5a^nb^t = 20a^{m+n}b^tc^v.$$

É evidente que se deve observar a regra dos sinais.

Aplicação. — Dividir $21a^6b^3cd^4$ por $-7a^6b^2c$.

Segundo a regra, diremos :

$$21\div(-7)=-3\ ;$$
$$a^6\div a^6=a^0=1\ ;$$
$$b^3\div b^2=b^{3-2}=b\ ;$$
$$d^4=d^4.$$

O quociente é pois $-3bd^4$.

51. **Caso em que a divisão não se faz exatamente.** — *Quando a divisão não se faz exatamente, põe-se o quociente sob a forma de fração que se simplifica dividindo os dois monómios pelos factores comuns.*

Exemplo. — Dividir $16a^5b$ por $8a^6b^2c^2$.

O quociente é

$$\frac{16a^5b}{8a^6b^2c^2}.$$

Simplifica-se este quociente dividindo o dividendo e o divisor pelo divisor comum $8a^5b$, e vem

$$\frac{2}{abc^2},$$

como quociente procurado.

VI. Divisão de um polinómio por um monómio.

52. **Regra.** — *Para dividir um polinómio por um monómio, divide-se cada termo do polinómio pelo monómio, e acrescentam-se os resultados.*

Seja dividir por m o polinomio $a-b+c-d$. O quociente é

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m};$$

pois que multiplicando-se esta expressão por m, reproduz-se o dividendo $a-b+c-d$.

Aplicação. — *Achar o quociente da divisão de*

$$8a^5-4a^4b+28a^3b^2-12a^2b^3 \text{ por } 4a^2.$$

Segundo a regra (52), este quociente é :

$$\frac{8a^5}{4a^2}-\frac{4a^4b}{4a^2}+\frac{28a^3b^2}{4a^2}-\frac{12a^2b^3}{4a^2},$$

ou simplificando,

$$2a^3-a^2b+7ab^2-3b^3.$$

53. **Divisões impossiveis.** — *Quando a divisão não se faz exatamente, escreve-se o quociente sob a forma de frações que se simplificam.*

Assim o quociente de

$$a^5b^2-a^4b^3cd+a^6b^4c^3 \text{ por } -a^6b^4c^3,$$

é

$$\frac{a^5b^2}{-a^6b^4c^3}-\frac{a^4b^3cd}{-a^6b^4c^3}+\frac{a^6b^4c^3}{-a^6b^4c^3},$$

ou simplificando,

$$-\frac{1}{ab^2c^3}+\frac{d}{a^2bc^2}-1.$$

OPERAÇÕES SOBRE OS TRES PRIMEIROS CASOS DA DIVISÃO

Efetuar as operações indicadas :

326. $a^5\div(-a^3)$

327. $(-7^{11})\div(-7^5)$

328. $(-a^7)\div(-a^4)$

329. $(-a^{10})\div(-a^{10})$

330. $a^{1+p}\div a^p$

331. $a^{2m+4}\div a^{m-4}$

332. $(5^4.3^5)\div(5^2.3^3)$

333. $7^{4m+2}\div 7^{4m}$

334. $a^{m+n}\div a^{m-n}$

335. $x^7\div x^0$

336. $a^{2m}\div a^{2m}$

337. $b^{m+2n}\div b^{m+2n}$

Efetuar as operações seguintes fazendo desaparecer os expoentes nulos ou negativos :

338. $a^{-2}\div a^3$

339. $3^{-2}\div 3^{-4}$

340. $4(a^0+b^0)\div(c^0+1)$

341. $(2^0a^m)\div\frac{3^0}{a+2b}$

342. $(a^0+b^0-6c^0+4d^0)(a^2+b^2)$

343. $a^3.a^0.a^{-2}.a^4.$

344. $(a^m\div a^{-m})a^{2m}$

345. $(a^2\div a^{-5})\div(a^3.a^{-5})$

346. $(1+a)^0\div(1+a)^{-1}$

347. $3^{-5}.4^{-2}.3^3.4^2$

348. $12(3^0-2)\ (4^0-2)$

349. $\frac{3^0}{4^{-3}}\div\frac{3^{-1}}{4^3}$

350. $(a^{-2}b^5\div a^3b^{-5})\ \frac{1}{a^{-2}b^{-3}}$

351. $(a^{-4}\div a^{-3})\div(a^{-4}.a^3)$

Efetuar as operações indicadas :

352. $a^7 \div a^4$

353. $-a^{17} \div a^{11}$

354. $24a^5 \div (-12a^4)$

355. $a^5b^4 \div (-a^3b^3)$

356. $8a^5b^4c^5df^3 \div (-4a^4b^3cdf^2)$

357. $ax^6y^4z^3 \div 4a^3x^5y^4z^3$

358. $(-27a^7b^6c^3d^5) \div (-25a^6b^4c^3d^5)$

359. $\frac{3}{4}a^mb^nc^p \div \frac{4}{3}a^{m'}b^{n'}c^{p'}$

360. $a^{3m}b^{3n}c^{4p} \div a^mb^{4n}c^{3p}$

361. $a^5x^{m+1}y^{n-1} \div a^3x^{m-1}y^{n-}$

362. $[(a-1)^4(x+1)^5(y-1)^4] \div [(a-1)^2(x+1)^3(y-1)^4]$

363. $(-35a^2.24a^3b^4c) \div (-7a^2b^4.48a^2b^2c)$

Simplificar os quocientes das divisões seguintes :

364. $9a^5b^2c^3 \div (-18a^4c^4)$

365. $(-5a^3b^2) \div (-10a^4b^2)$

366. $(-a^6x^5y^4z^3) \div a^3x^2y^4z^4$

367. $a^mx^n \div (-a^{2m}x^{2n})$

368. $15a^5 \div 25a^4$

369. $(-250a^4b) \div 100a^5$

370. $(-7^43^24^8) \div (7^2.3^2.4^7)$

371. $441a^5b^2 \div (-21^2a^4b^3)$

372. $(2^a.3^b.5^c) \div 2^{2a}.3^b.5^{c-1}$

373. $[(a+b)^4(a-b)^3] \div [(a+b)^3(a-b)^4]$

Efetuar as divisões indicadas e simplificar o quociente quando a divisão é impossivel :

374. $(a^2-a) \div a$

375. $(a^4-3a^3+2a^2) \div (-a^2)$

376. $(xy+y^2-yz) \div y$

377. $(a-7a^2) \div \frac{a}{7}$

378. $(4a^4-12a^3+4a) \div (-4a)$

379. $(x^4y^2+x^3y^3-x^2y^4) \div x^2y^2$

380. $(a^3bc-ab^3c-abc^3) \div (-abc)$

381. $(3a^2b-3ab^2) \div 3ab$

382. $(x^2yz-xyz^2) \div (-xyz)$

383. $(x^3yz^3-x^2y^2z^2-x^2y^2z^3) \div x^2yz^2$

384. $(6a^2-9a^5-18a^4+15a^3-36a^6) \div (-3a^4)$

385. $(108x^4y^4z^6-81x^5y^3z^3+72x^4y^2z^5) \div (-9x^2y^2z^2)$

386. $(36x^4y^5-24x^5y^6+72x^6y^6) \div \left(-\frac{12}{11}x^4y^5\right)$

387. $(a^m-a^{m+1}+a^{m+3}-a^{2m-4}) \div (-a^m)$

388. $(25a^{2m}b^{2n}+100a^{3m}b^{3n}-50a^{4m}b^{2n}-125a^{5m}b^{4n}) \div 25a^{2m}b^{2n}$

389. $(15a^5b^4c^3-45a^7b^2c^4) \div 30a^7b^3c^4$

390. $(2a^6b-6a^5b^2+10a^5b^4) \div (-4a^4b^4c^5)$

391. $(ab+ac-bc) \div abc$

392. $(abc-abd-acd+bcd) \div abcd$

393. $(a^2c^4-b^2c^6) \div a^2b^2c^4$

394. $4x^2(3x^2y-5xy^2) \div 8x^2y^3$

395. $(a^3-a^2+a-1) \div a^2$

396. $(a^3b^4-a^4b^3) \div (-a^4b^4)$

397. $(6a^2-12a^3+24a^5) \div 48a^4$

398. $(a^3b^5-a^4b^4+a^2b^3) \div (-4a^5b^4)$

399. $(2^4.3^4-4^2.3^4) \div (-2^3.3^4.4^2)$

400. $5.4^2(3.4^2.a-4a^2) \div (8.4^2.a^2)$

401. $(x^{m+n}-x^{n+p}) \div x^{m+n+p}$

402. $(x^{2m-1}+x^{3n-4}) \div x^{2m-n}$

CAPITULO VI

DIVISÃO DE POLINÓMIOS — FACTOREAÇÃO

I. Divisão dos polinómios inteiros em x.

54. **Definição.** — *Devidir um polinómio A inteiro em x por outro polinómio B inteiro em x, é achar um polinómio Q tambem inteiro em x, tal que a diferença A—BQ seja um polinómio de gráu menor que o divisor B.*

A diferença A—BQ chama-se *resto* da divisão e designa-se por R.

Temos portanto,

$$A-BQ=R,$$

ou

$$A=BQ+R.$$

55. **Regra.** — *Para se obter o quociente de dois polinómios inteiros em x :*

1.º *Ordenam-se os polinómios segundo as potências decrescentes de x ;*

2.º *Divide-se o primeiro têrmo do dividendo pelo primeiro têrmo do divisor : o resultado é o primeiro têrmo do quociente ;*

3.º *Subtrai-se do dividendo o produto do divisor pelo têrmo obtido no quociente, e ordena-se o resto, que é o primeiro dividendo parcial ;*

4.º *A divisão do primeiro têrmo deste dividendo parcial pelo primeiro têrmo do divisor fornece o segundo têrmo do quociente ;*

5.º *Depois de subtrair do primeiro dividendo parcial o produto do divisor pelo segundo têrmo do quociente, obtem-se, para resto, o segundo dividendo parcial, cujo primeiro têrmo dividido pelo primeiro têrmo do divisor dá o terceiro têrmo do quociente ;*

6.º *Continúa-se deste modo até se obter um dividendo parcial nulo ou de gráu inferior ao do divisor.*

Este ultimo dividendo parcial é o resto da divisão.

Seja dividir o polinómio

$$A=77x^5-49x^4+38x^3-75x^2-2x+10,$$

pelo polinomio

$$B=11x^2-7x-4.$$

O quociente Q é um polinomio inteiro em x tal que, multiplicado pelo divisor B, e aumentado do resto, êle reproduza o dividendo A : de sorte que se póde escrever

$$A=B\times Q+R.$$

Os dois polinómios A e B, ordenados em relação ás potências decrescentes de x, dispõem-se, como para uma divisão aritmetica :

$$\begin{array}{l|l} 77x^5-49x^4+38x^3-75x^2-2x+10 & 11x^2-7x-4 \\ -77x^5+49x^4+28x^3 & 7x^3+6x-3 \\ \hline \quad 66x^3-75x^2-2x+10 & \\ \quad -66x^3+42x^2+24x & \\ \hline \qquad -33x^2+22x+10 & \\ \qquad +33x^2-21x-12 & \\ \hline \qquad\qquad x-2 & \end{array}$$

O primeiro têrmo de A ou $77x^5$ é o produto exato do primeiro têrmo de B pelo primeiro têrmo de Q (40) ; obtem-se, pois, o primeiro têrmo do quociente dividindo $77x^5$ por $11x^2$, e vem $7x^3$. Subtraindo do dividendo o produto do divisor $11x^2-7x-4$ por $7x^3$, o resto obtido

$$66x^3-75x^2-2x+10$$

representa o primeiro dividendo parcial.

Este dividendo parcial é igual ao produto do divisor pelos outros termos do quociente, mais o resto, se houver.

O primeiro têrmo $66x^3$ deste dividendo parcial é, pois, o produto exato do primeiro têrmo $11x^2$ do divisor pelo segundo termo do quociente (40) ; obtem-se este segundo termo dividindo $66x^3$ por $11x^2$, e vem $6x$.

Depois de subtrair do segundo dividendo parcial o produto do divisor por $6x$, vem :

$$-33x^2+22x+10$$

para o segundo dividendo parcial.

Continuando como acima, divide-se $-33x^2$ por $11x^2$, e vem — 3 para o terceiro têrmo do quociente.

O produto do divisor por —3, subtraido do segundo dividendo parcial, dá $x-2$ para o terceiro dividendo parcial. O gráu deste polinómio é menor que o do divisor ; portanto, a divisão não é mais possivel.

O quociente da divisão é pois

$$7x^3+6x-3,$$

e o resto é $x-2$.

56. **Prova da divisão.** — Para fazer a prova da divisão multiplica-se o divisor pelo quociente e acrescenta-se o resto ao produto ; se a operação estiver certa, vem o dividendo.

Isto resulta da igualdade

$$A=BQ+R.$$

57. **Aplicação.** — Seja dividir x^3+a^3 por $x+a$.

Ordenados em relação a x, os polinómios dispõem-se como para uma divisão aritmética :

$$\begin{array}{l|l} x^3+a^3 & x+a \\ -x^3-ax^2 & x^2-ax+a^2 \\ \hline \quad -ax^2+a^3 & \\ \quad +ax^2+a^2x & \\ \hline \qquad a^2x+a^3 & \\ \qquad -a^2x-a^3 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Segundo a regra, divide-se x^3 por x, e vem x^2 para primeiro têrmo do quociente, que se escreve debaixo do divisor.

O produto do divisor pelo primeiro têrmo x^2 do quociente é

$$(x+a)x^2=x^3+ax^2,$$

que se subtrai do dividendo. O resto da subtração é

$$-ax^2+a^3 ;$$

é o primeiro dividendo parcial.

O segundo têrmo do quociente é

$$-ax^2\div x=-ax,$$

que se escreve em seguida ao primeiro termo calculado, x^2.

O produto do divisor por $-ax$ é

$$(x+a)(-ax)=-ax^2-a^2x,$$

que se subtrai do primeiro dividendo parcial. O resultado

$$a^2x+a^3,$$

é o segundo dividendo parcial.

Emfim, o terceiro têrmo do quociente é

$$a^2x \div x = a^2.$$

O produto do divisor por a^2, ou

$$(x+a)a^2 = a^2x + a^3,$$

subtraido do dividendo parcial, dá 0 como resto. O quociente procurado é :

$$x^2 - ax + a^2.$$

II. Divisibilidade dos polinómios inteiros em x por binómios da forma $x-a$.

58. **Teorema.** — *O resto da divisão de um polinómio* P, *inteiro em* x *pelo binómio* x—a, *obtem-se substituindo* x *pela letra* a *neste polinómio.*

Para o demonstrar, representemos por Q o quociente e R o resto da divisão de P por $x-a$; temos :

$$P = (x-a)Q + R.$$

Esta igualdade existe seja qual fôr o valor atribuido a x, pois que em toda divisão, o dividendo iguala sempre o produto do divisor pelo quociente mais o resto.

Podemos, pois, atribuir a x o valor a. Substituindo x pela letra a, o produto $(x-a)Q$ anula-se ; P toma certo valor que designaremos por P_a ; e R não muda, visto que o gráu deste resto, sendo menor que o do divisor $x-a$, R não contem x.

A identidade :

$$P = (x-a)Q + R,$$

reduz-se pois a :

$$P_a = R, \quad \text{ou a} \quad R = P_a$$

Logo : *O resto da divisão.....*

59. **Corolário.** — *Um polinómio é divisivel por* x—a *quando se anula substituindo* x *pela letra* a.

Substituindo x pela letra a na identidade

$$P = (x-a)Q + R,$$

temos :

$$R = P_a.$$

Se $P_a = 0$, temos R=0 e :

$$P = (x-a)Q.$$

60. **Aplicações.** — 1.º *Achar o resto da divisão de* x^2+a^2 *por* $x-a$.

Basta substituir x pela letra a no dividendo, que vem a ser

$$a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Temos, pois :

$$R = 2a^2.$$

2º *Achar o resto da divisão de* a^3-b^3 *por* $a-b$.

Substituindo no dividendo a por b, temos :

$$R = b^3 - b^3 = 0.$$

O polinómio a^3-b^3 é, pois, divisivel por $a-b$.

3º *Achar o resto da divisão de* $a^2+ab-a-b$ *por* $a+b$.

O divisor $a+b$ póde-se escrever $a-(-b)$; obteremos o resto da divisão substituindo no dividendo a por $-b$. Temos, pois :

$$R = (-b)^2 + b(-b) - (-b) - b = b^2 - b^2 + b - b = 0.$$

4º *Achar o valor que* a *deve ter para que* x—a *seja divisor de* x^2+2x+1.

Para que $x-a$ divida x^2+2x+1, é preciso que este ultimo polinómio se anule (59) para $x=a$.

É preciso pois que tenhamos :

$$a^2 + 2a + 1 = 0 \text{ ou } (a+1)^2 = 0.$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois membros, vem :

$$a + 1 = 0 \text{ ; donde } a = -1.$$

Assim, para que $x-a$ divida x^2+2x+1, é preciso que $a=-1$

III. Factoreação ou decomposição em factores.

61. *Factorear ou decompôr em factores* é transformar um polinómio em um produto de varios factores. Eis alguns casos de factoreação.

1.º **Caso.** — *Quando todos os termos de um polinómio contêm um mesmo factor, póde-se suprimir este factor em cada têrmo do polinómio, e depois indicar a multiplicação da soma dos termos assim modificados, pelo factor supresso.*

Esta operação chama-se *pôr em evidencia o factor comum.*

Esta regra resulta da igualdade

$$(a-b+c-d)m = am-bm+cm-dm$$

demonstrada no numero 36, que se póde escrever :

$$am-bm+cm-dm = (a-b+c-d)m$$

Aplicações. — 1.º *Decompôr em factores o polinómio.*

$$4a^5-8a^4-12a^2.$$

Os termos deste polinómio contêm todos um factor comum $4a^2$, de sorte que se póde escrever :

$$4a^5-8a^4-12a^2 = 4a^2(a^3-2a^2-3).$$

2º *Decompôr em factores o polinómio*

$$6a^3b^2c^5d+18a^4b^4c^4-36a^4b^3c^4.$$

Os termos têm o factor comum $6a^3b^2c^4$; portanto, este polinomio póde escrever-se :

$$6a^3b^2c^4(cd+3ab^2-6ab).$$

2.º **Caso.** — *Quando um polinómio é quadrado perfeito, póde-se evidenciar a quantidade cujo quadrado produz o polinómio.*

1º Exemplo : $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,

2º $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$,

3º $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$,

e assim por diante.

3.º **Caso.** — *Quando um polinómio é cubo perfeito, póde-se evidenciar a quantidade cujo cubo produz o polinómio.*

Exemplos : $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$.

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$.

O mesmo se dá com as outras potências, a da 4ª ordem, a da 5ª ordem, etc.

4.º **Caso.** — *A diferença de dois quadrados vale a soma das raizes multiplicada por sua diferença.*

E' uma consequencia da identidade do nº 42, e temos :

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Por causa da mesma propriedade aplicada duas vezes, temos :

$$(a^4-b^4)=(a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^2+b^2)(a+b)(a-b).$$

Aplicando 3 vezes a mesma propriedade, temos :

$$a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b).$$

5.º **Caso.** — *Por causa do teorema do n.º 59, a expressão* a^n-b^n *é sempre divisivel por* $a-b$, *e a expressão* $a^{2n+1}+b^{2n+1}$ *é sempre divisivel por* $a+b$.

Por isso, temos :

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

6.º **Caso.** — Em alguns casos, a observação atenta dos termos de um polinómio mostra que resultam do produto de dois ou mais factores.

Exemplo : $x^2+ax+bx+ab=(x+a)(x+b)$.

Quando os factores são binómios, como $a-x$, $a+b$, o teorema do nº 59 é muito útil para os reconhecer e factorear.

7.º **Caso.** — *Veremos no n.º 184 que o trinómio do 2.º gráu* ax^2+bx+c *é decomponivel em 3 factores :* $a(x-x')(x-x'')$, *designando-se por* x' *e* x'' *as raizes do trinómio.*

Ha muito outros casos interessantes de factoreação que se encontram nas matematicas, como o da superficie de um triangulo em função dos 3 lados (Vêr geometria, c. medio, nºs 234 e 235).

EXERCICIOS SOBRE A DIVISÃO ALGÉBRICA

Efetuar as divisões seguintes :

403. $(a^3-b^3)\div(a-b)$
404. $(a^3+b^3)\div(a+b)$
405. $(x^3+y^3)\div(x^2-xy+y^2)$
406. $(x^4-y^4)\div(x-y)$
407. $(x^5-1)\div(x-1)$
408. $(x^6-y^6)\div(x^2-y^2)$
409. $(x^6+y^6)\div(x^2+y^2)$
410. $(x^{12}-y^{12})\div(x^4-y^4)$
411. $(x^6-b^6)\div(x^2-b^2)$
412. $(x^5+1)\div(x+1)$
413. $(x^7-x^2)\div(x^6-x)$
414. $(x^{15}-1)\div(x^5-1)$
415. $(x^7-128)\div(x-2)$
416. $\left(\frac{x^4}{81}-1\right)\div\left(\frac{x}{3}+1\right)$
417. $(a^5-x^5)\div(a-x)$
418. $(9x^4-16y^4)\div(3x^2-4y^2)$
419. $(625x^4-256y^4)\div(5x^2-4y)$
420. $(256x^7-2187y^7)\div(2x-3y)$
421. $\left(\frac{16x^4}{81}-1\right)\div\left(\frac{2x}{3}-1\right)$
422. $(xy+x-y-1)\div(x-1)$
423. $(a^2+ab-a-b)\div(a+b)$
424. $(a^5-a^2b^3-a^3+b^3)\div(a^2-1)$
425. $(x^3-2x^2+2x-1)\div(x-1)$
426. $(x^4-y^4-x^2+y^2)\div(x^2-y^2)$
427. $(32a^5-243y^5)\div(2a-3y)$
428. $(a^2+2ab+b^2-1)\div(a+b-1)$
429. $(a^4+b^4+a^2b^2)\div(a^2+b^2-ab)$
430. $(x^3+y^3+z^3-3xyz)\div(x+y+z)$
431. $(x^4-1+2xy-x^2y^2)\div(x^2+1-xy)$
432. $(4abx+b^2x-x-8ab-2b^2+2)\div(x-2)$
433. $(8a^2x^2+2abx-6ax-b^2-3b)\div(2ax+b)$
434. $(27a^6b-63a^5b^2-3a^3b^4+7a^2b^5)\div(3a^3b-7a^2b^2)$
435. $(10y^3+1-5y-10y^2+5y^4-y^5)\div(y^2-2y+1)$

436. $(10a^4bc+20a^2b^2c-4a^2b-8b^3)\div(5a^2bc-2b)$
437. $(x^3-ax^2-abx-ab^2-b^3)\div(x-a-b)$
438. $(x^6-x^5+x^4+x^3-2x^2+2x-2)\div(x^3-x^2+x-1)$

Efetuar as divisões seguintes e dar o resto de cada operação

439. $(a+b)\div(a-b)$
440. $(x^2+a^2)\div(x+a)$
441. $(x^5+1)\div(x^2-1)$
442. $(a^4+b^4)\div(a+b)$
443. $(x^4+y^4)\div(x-y)$
444. $(x^{10}+a^{10})\div(x^2+a^2)$
445. $(x^5-x^4+x^2)\div(x^2-1)$
446. $(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)\div(x^3-x^2+x-1)$

Calcular os quatro primeiros termos do quociente de cada uma das divisões seguintes e dar o resto correspondente :

447. $x^4\div(x^2-1)$
448. $(a^5+1)\div(a-1)$
449. $(a^{15}+b^{15})\div(a^3-b^3)$
450. $1\div(x+a)$
451. $(a^9-a^7-a^5-a^3-a^2-2)\div(a-2)$
452. $(x^5-1)\div(x^2+1)$
453. $(x^{3n}-a^{3n})\div(x^n-a^n)$
454. $(x^m-1)\div(x+1)$
455. $(a^m-b^m)\div(a-b)$
456. $(x^{6m+3}+a^{6m+3})\div(x^3+a^3)$

Sem efetuar a divisão, achar o resto de cada uma das divisões seguintes :

457. $(a-b)\div(a+b)$
458. $(a^2+1)\div(a-2)$
459. $(a^3+b^3)\div(a-b)$
460. $(x^3-1)\div(x+1)$
461. $(x^4-y^4-x^3+y^3)\div(x^2+y^2)$
462. $(x^2+xy-x+y)\div(x-y)$
463. $(16a^4-1)\div(2a+2)$
464. $(a^2+2ax+x-1)\div(a+x+1)$

Decompôr em factores as expressões seguintes :

465. a^2+a
466. $a-ab$
467. $6a^3-12a^2b-24a^4$
468. $25a^3+35a^4-45a^5$
469. $a^3b^2-2a^2b$
470. $460a^3x^5y^4-130a^4x^4y^3$
471. $2x-5x^2$
472. $a^4+a^3-a^2$
473. $152x^4-38x$
474. $a^2b^2x^3y-ab^3x^2y^2$
475. $(5ax^2)^5-(5ax^2)^4$
476. $18x^5y^4z^3-30x^4y^3z^3$
477. $84a^5b^4-108a^4b^4-420a^4b^3$
478. $(2x^3)^2-(4x^3)^3+(8x)^6$
479. $100-9$
480. a^2-b^2
481. a^2-1
482. a^4-b^4
483. $(a+1)^2-1$
484. $a^{16}-b^{16}$
485. $(m+n)^2-m^2$
486. a^6-b^6
487. $16a^4-9a^6$
488. $(a-1)^2-(a-2)^2$
489. $a^2+a+\frac{1}{4}$
490. $1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
491. $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$
492. $a^2+8a+16$
493. $a^2-10a+25$
494. $a^{10}-a^8+a^6-a^4$
495. $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$
496. $4a^4+2a^2+\frac{1}{4}$

CAPITULO VII

FRAÇÕES ALGÉBRICAS

I. Preliminares.

62. **Definições.** — *Fração algébrica* ou *razão* é a indicação da divisão de duas quantidades algébricas quaisquer.

A expressão $\frac{a}{b}$ é uma fração ou razão.

Duas frações são *equivalentes* quando têm o mesmo valor numerico.

Uma *proporção* é a igualdade de duas frações equivalentes.

Por exemplo, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ é uma proporção. a é o 1.º têrmo, b é o 2.º, c é o 3.º e d é o 4.º. a e d são os extremos e b e c são os meios da proporção.

63. **Teorema.** — *Uma fração algébrica não muda de valor multiplicando-se ou dividindo-se os dois termos por uma mesma quantidade.*

1º Seja q o quociente de a por b ; temos :

$$q=\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad bq=a.$$

Multiplicando por uma quantidade qualquer m os dois termos desta igualdade, temos uma nova igualdade :

$$bmq=am.$$

Emfim, dividindo cada membro por bm, vem :

$$q=\frac{am}{bm} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

2º Como m é arbitrario, podemos pôr $m=\frac{1}{n}$.

Levando esse valor de m para a igualdade

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}, \quad \text{temos} \quad \frac{a}{b}=\frac{a\times 1/n}{b\times 1/n}=\frac{a\div n}{b\div n}.$$

As duas igualdades :

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b}=\frac{a\div n}{b\div n},$$

demonstram o teorema.

II. Reduções de frações.

64. **Reduções de frações.** — Reduções são todas as transformações que se fazem nas frações sem lhes *alterar* o valor. São duas principais :

1.º *Simplificar frações ;*
2.º *Reduzir frações ao mesmo denominador.*

65. **Definição.** — Simplificar uma fração é achar outra fração algébrica equivalente, cujos termos tenham gráus inferiores.

66. **Primeira regra.** — *Simplifica-se uma fração dividindo os dois termos pelos factores comuns.*

Exemplo : 1.º *Seja simplificar a fração*

$$\frac{144a^5b^4c^3d}{36a^4b^5c^2}.$$

Dividindo os dois termos desta fração pelo divisor comum $36a^4b^4c^2$, a fração não muda de valor e vem a ser :

$$\frac{144a^5b^4c^3d\div 36a^4b^4c^2}{36a^4b^5c^2\div 36a^4b^4c^2}=\frac{4acd}{b}.$$

2º *Simplificar a fração* $\frac{a^2-b^2}{a^4-b^4}$.

Temos :

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)\,(a^2-b^2).$$

Então podemos escrever :

$$\frac{a^2-b^2}{a^4-b^4}=\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)\,(a^2-b^2)}=\frac{1}{a^2+b^2}.$$

67. **Segunda regra.** — *Reduzem-se varias frações ao mesmo denominador, multiplicando-se os dois termos de cada uma pelo produto dos denominadores de todas as outras.*

Sejam as frações :

$$\frac{a}{b},\quad \frac{c}{d},\quad \frac{m}{n}.$$

Multiplicando os dois termos da primeira fracção por dn, os dois termos da segunda por bn e os dois termos da terceira por bd, elas não mudam de valor e vêm a ser :

$$\frac{adn}{bdn},\quad \frac{bcn}{bdn},\quad \frac{bdm}{bdn},$$

68. **Observação.** — Ás vezes toma-se para denominador comum o denominador de uma das frações dadas, quando é um múltiplo dos denominadores das outras frações. Assim, para reduzir ao mesmo denominador as frações,

$$\frac{a}{a+b},\quad \frac{b}{a-b},\quad \frac{ab}{a^2-b^2},$$

tomaremos a^2-b^2 como denominador comum, porque

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Para efetuar a redução, multiplicam-se os dois termos da primeira fração pelo factor $a-b$ e os dois termos da segunda pelo factor $a+b$; estas frações vêm a ser então

$$\frac{a(a-b)}{a^2-b^2},\quad \frac{b(a+b)}{a^2-b^2},\quad \frac{ab}{a^2-b^2}.$$

III. Adição e subtração de frações.

69. **Regra da adição.** — *Para somar varias frações, é preciso reduzi-las ao mesmo denominador, fazer a soma dos numeradores e dar ao resultado o denominador comum.*

A soma das frações :

$$\frac{a}{n},\quad \frac{c}{n},\quad \frac{d}{n} \quad \text{é com evidencia} \quad \frac{a+c+d}{n},$$

pois que estas frações representam respetivamente a vezes, c vezes e d vezes a n^a parte da unidade (1).

Aplicação. — *Achar a soma das tres frações*

$$\frac{a}{2b},\quad \frac{b}{2a},\quad \frac{c}{3ab}.$$

(1) A n^a parte da unidade lê-se *enésima parte* da unidade.

Para somar estas frações é preciso reduzi-las ao mesmo denominador; para isso multiplicam-se respetivamente por $3a$, $3b$ e 2 os dois termos de cada uma. Elas vêm a ser:

$$\frac{3a^2}{6ab}, \quad \frac{3b^2}{6ab}, \quad \frac{2c}{6ab}.$$

Sua soma, segundo a regra, é

$$\frac{3a^2+3b^2+2c}{6ab}.$$

70. **Regra da subtração.** — *Para subtrair duas frações é preciso reduzi-las ao mesmo denominador, fazer a diferença dos numeradores e dar ao resultado o denominador comum.*

A diferença das duas frações

$$\frac{a}{n} \quad \text{e} \quad \frac{c}{n} \text{ é, com evidencia, } \frac{a-c}{n},$$

pois que essa diferença deve encerrar a vezes, menos c vezes a n^a parte da unidade.

Aplicação. — *Efetuar a subtração seguinte:*

$$\frac{2ab}{a-b}-\frac{4b}{a+b}.$$

Reduzindo as duas frações ao mesmo denominador, vem:

$$\frac{2a}{a-b}-\frac{4b}{a+b}=\frac{2a(a+b)-4b(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a^2-2ab+4b^2}{a^2-b^2}.$$

IV. Multiplicação e divisão de frações.

71. **Regra da multiplicação.** — *Para se multiplicar varias frações faz-se o produto dos numeradores e o dos denominadores, e indica-se a divisão do primeiro produto pelo segundo.*

Seja multiplicar:

$$\frac{a}{b} \text{ por } \frac{c}{d}.$$

Devemos ter:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Com efeito, escrevamos as duas igualdades:

$$q=\frac{a}{b} \quad \text{e} \quad q'=\frac{c}{d}.$$

Destas igualdades tira-se:

$$bq=a \quad \text{e} \quad dq'=c,$$

cujo produto membro a membro dá a igualdade:

$$bqdq'=ac.$$

Dividindo por bd estes dois produtos iguais, vem:

$$qq'=\frac{ac}{bd}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Aplicação. — *Efetuar o produto seguinte:*

$$\frac{3}{5}\times\frac{15a^4}{7b^4}\times\frac{-11b^5}{9a^3}.$$

O produto dos numeradores é

$$3\times15a^4(-11b^5)=-495a^4b^5,$$

e o dos denominadores,

$$5\times7b^4\times9a^3=315a^3b^4.$$

O produto é, pois:

$$\frac{-495a^4b^5}{315a^3b^4}=-\frac{11ab}{7}.$$

72. **Regra da divisão.** — *Obtem-se o quociente de duas frações multiplicando-se a fração dividendo pela fração divisor invertida.*

Seja dividir:

$$\frac{a}{b} \quad \text{por} \quad \frac{c}{d}.$$

Devemos ter:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Com efeito, se escrevermos:

$$q=\frac{a}{b} \quad \text{e} \quad q'=\frac{c}{d},$$

teremos:

$$bq=a \quad \text{e} \quad dq'=c.$$

O quociente, membro a membro, destas duas igualdades, dá a nova igualdade :

$$\frac{bq}{dq'}=\frac{a}{c}.$$

Multiplicando os dois membros por $\frac{d}{b}$, vem :

$$\frac{q}{q'}=\frac{a}{c}\times\frac{d}{b}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c},$$

ou ainda :

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc},$$

o que legitima a regra.

Aplicação. — *Efetuar a divisão seguinte :*

$$\frac{33a^4x^5y^6}{a^2-b^2}\div\frac{22a^3x^4y^5}{a^4-b^4}.$$

Segundo a regra precedente, o quociente será

$$\frac{33a^4x^5y^6}{a^2-b^2}\times\frac{a^4-b^4}{22a^3x^4y^5}=\frac{33a^4x^5y^6(a^4-b^4)}{22a^3x^4y^5(a^2-b^2)}=\frac{3axy(a^2+b^2)}{2}.$$

V. Propriedades das proporções.

73. **Teorema.** — *Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.*

Seja a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; devemos ter $ad=bc$.

Com efeito, se multiplicarmos por bd os dois membros desta proporção, ela torna-se :

$$\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d} \quad \text{ou} \quad ad=bc.$$

74. **Corolários.** — 1.º Dahí resulta que *numa proporção pódem-se permutar os têrmos meios assim como os têrmos extremos.*

Verifica-se, com efeito, que nas quatro proporções seguintes :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}; \qquad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}; \qquad \frac{d}{b}=\frac{c}{a}; \qquad \frac{d}{c}=\frac{b}{a},$$

obtidas efetuando essas permutações, o produto dos meios e o produto dos extremos dão sempre :

$$ad=bc.$$

2.º *Proporção continua* é aquela que tem iguais os meios ou os extremos. Assim :

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b} \quad \text{e} \quad \frac{x}{a}=\frac{b}{x} \text{ são proporções continuas.}$$

Numa proporção continua, cada um dos dois termos iguais chama-se *média proporcional* ou *média geométrica* dos dois outros termos. Nos exemplos acima, x é média proporcional ou geométrica de a e de b.

A média proporcional de duas quantidades iguala a rais quadrada do produto dessas quantidades.

Com efeito, na proporção :

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b},$$

se fizermos o produto dos meios e o dos extremos, temos :

$$x^2=ab,$$

e extraindo a rais quadrada dos dois membros desta igualdade :

$$x=\sqrt{ab}.$$

75. **Teorema.** — *Em toda proporção : a soma dos dois primeiros termos está para o 2º têrmo assim como a soma dos dois ultimos termos está para o 4º têrmo ;*

A diferença dos dois primeiros termos está para o 2º têrmo assim como a diferença dos dois ultimos termos está para o 4º têrmo.

Seja a proporção

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}. \tag{1}$$

Devemos ter :

$$1^\circ \ \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad \text{e} \quad 2^\circ \ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

Com efeito : 1º Acrescentando a unidade aos dois membros de (1), a igualdade vem a ser :

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \quad \text{ou} \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}. \tag{2}$$

2º Subtraindo a unidade dos dois membros de (1), esta igualdade vem a ser :

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad \text{ou} \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}. \tag{3}$$

Corolário. — *Em toda proporção a soma dos dois primeiros termos e sua diferença dão a mesma razão que a soma e a diferença dos dois ultimos.*

Com efeito, nas proporções (2) e (3), trocando os meios de lugar, temos :

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d} \quad \text{e} \quad \frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d};$$

donde concluimos :

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}.$$

Emfim, a permutação dos meios dá :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

76. **Teorema.** — *Em toda proporção, a razão formada pela soma dos numeradores e a soma dos denominadores iguala cada uma das razões da proporção.*

A razão formada pela diferença dos numeradores e a diferença dos denominadores iguala cada uma das razões da proporção.

Seja a proporção

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Permutando os meios, ela dá :

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

Aplicando a esta proporção o teorema precedente (75), temos :

$$\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d} \quad \text{e} \quad \frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d};$$

ou, permutando os meios :

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}.$$

Corolário. — *Em toda proporção, a soma dos numeradores e sua diferença dão a mesma razão que a soma dos denominadores e sua diferença.*

Com efeito, igualando os dois valores da razão $\frac{c}{d}$, temos (Nº 76) :

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}.$$

77. **Teorema.** — *Numa série de razões iguais, a razão formada pela soma dos numeradores e a soma dos denominadores iguala cada uma das razões dadas.*

Seja a série de razões iguais.

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'''}{b'''};$$

teremos :

$$\frac{a}{b}=\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''}.$$

Com efeito, se designarmos por q o valor comum de todas as razões iguais, teremos :

$$q=\frac{a}{b}; \quad q=\frac{a'}{b'}; \quad q=\frac{a''}{b''}; \quad q=\frac{a'''}{b'''}.$$

Donde se tira :

$$bq=a; \quad b'q=a'; \quad b''q=a''; \quad b'''q=a'''. \quad (1)$$

Somando membro a membro todas estas igualdades, vem :

$$q(b+b'+b''+b''')=a+a'+a''+a''';$$

donde

$$q=\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''},$$

e emfim

$$\frac{a}{b}=\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''}.$$

Corolário. — *Numa série de razões iguais, a razão formada pela raiz quadrada da soma dos quadrados dos numeradores e a raiz quadrada da soma dos quadrados dos denominadores, iguala cada uma das razões dadas.*

Com efeito, somando membro a membro as igualdades (1) depois de elevá-las ao quadrado temos :

$$b^2q^2+b'^2q^2+b''^2q^2+b'''^2q^2=a^2+a'^2+a''^2+a'''^2.$$

Donde se deduz :

$$q^2=\frac{a^2+a'^2+a''^2+a'''^2}{b^2+b'^2+b''^2+b'''^2} \quad \text{e} \quad q=\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+a'''^2}}{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2+b'''^2}},$$

$$\text{e} \quad \frac{a}{b}=\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+a'''^2}}{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2+b'''^2}}.$$

EXERCICIOS SOBRE AS FRAÇÕES E AS PROPORÇÕES

Simplificar as frações :

497. $\frac{a}{a^3}$

498. $\frac{4x^4}{12x^7}$

499. $\frac{64a^3}{32a^5}$

500. $\frac{ax^4}{5x^3}$

501. $\frac{a^4x^2}{a^3x^3}$

502. $\frac{8a^2b^3}{24a^3b^2}$

503. $\frac{32x^3y^4z^2}{16x^4y^3z^4}$

504. $\frac{27a^5b^2c^3d^4}{63a^2b^3c^4d^5}$

505. $\frac{532x^3y^4z^3}{644x^4y^3z^3u^2}$

506. $\frac{96a^5b^4c^2}{8a^2b^3c^4d}$

507. $\frac{25a^3b^2.15a^3b^5}{150a^6b^7}$

508. $\frac{72a^4b^3c^2d^3.abcd^2}{1296a^4b^4c^4d^5}$

509. $\frac{\frac{1}{5}ab.\frac{1}{3}a^2b^2}{\frac{1}{15}a^2b^3}$

510. $\frac{48a^3b^3 \div 4a^2b^2}{2ab^2}$

511. $\frac{(4a^2x^2)^3}{(2ax^3)^4}$

512. $\frac{(12a^3b^2c)^2(6a^2b)^2}{(36a^2b^3c)^2}$

513. $\frac{a^2-1}{a-1}$

514. $\frac{a+b}{a^2-b^2}$

515. $\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}$

516. $\frac{a^2-ab}{a^3-ab^2}$

517. $\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}$

518. $\frac{a^4-b^4}{a^5-b^5}$

519. $\frac{a+b}{a^3+b^3}$

520. $\frac{16a^4-81}{4a^2+9}$

521. $\frac{a^2-1}{a^4-1}$

522. $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$

523. $\frac{a^2+2a+1}{a^2-a-2}$

524. $\frac{x^3+y^3}{(x-y)^2+xy}$

525. $\frac{(4a^2-1)^2+1}{(4a^2-1)^4-1}$

526. $\frac{4b^2+c^2-4bc}{c^2-4b^2}$

527. $\frac{3a^2b^4+9a^3b^2x}{4a^2b^5+12a^3b^3x^2}$

528. $\frac{1-x^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$

529. $\frac{4-2x}{4-x^2}$

530. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

Reduzir ao mesmo denominador as frações seguintes

531. $5, \frac{a}{b}$.

532. $\frac{a}{4}, \frac{b}{3}$.

533. $4, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$.

534. $\frac{a}{b}, \frac{-a}{b}$.

535. $\frac{2}{3}, -a$.

536. $\frac{a}{bc}, \frac{b}{ac}, \frac{-c}{ab}$.

537. $\frac{a}{-bx}, \frac{-b}{ax^2}, \frac{c}{abx^3}$.

538. $1, \frac{a}{x}, \frac{-a}{x^2}, -a^2$.

539. $2, -1, \frac{1}{2a^2}, \frac{1}{-4a^4}$.

540. $\frac{ab-a}{b+1}, \frac{ab+a}{b-1}$.

541. $\frac{a}{a-b}, \frac{c}{a^2-b^2}$.

542. $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a-b}, \frac{1}{a^2-b^2}$.

543. $1, \frac{b}{a}, \frac{b^2}{a^2}, \frac{b^3}{a^3}$.

544. $\frac{a}{a^4-b^4}, \frac{1}{a^2+b^2}, \frac{1}{a^2-b^2}$.

545. $\frac{1}{5x^2}, \frac{-4x}{5}, \frac{-11}{2x^3}, \frac{-7}{4}$.

546. $\frac{1}{a^2}, a^2, \frac{-2}{a^3}, \frac{-a^3}{2}$.

547. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{ab}, \frac{1}{ac}, \frac{1}{bc}, \frac{1}{abc}$.

548. $\frac{a}{bx}, \frac{c}{ay}, \frac{d}{cz}, \frac{acd}{xyz}$.

Reduzir as expressões seguintes a uma só expressão fracionária e simplificar :

549. $a+b-\frac{2b^2}{a-b}$

550 $1+\frac{a}{b}$

551. $a+\frac{c}{4}$

552. $a-\frac{a^2}{b}$

553. $a-b+\frac{c}{a^2}$

554. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-1$

555. $ax(a+x)-\frac{a^4x+ax^4}{a^2+2ax+x^2}$

556. $\frac{x+2}{y-x}-\frac{y-2}{y+x}$

557. $\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}$

558. $x^2+x+1+\frac{1}{x^2-1}$

559. $\frac{(x-y)^2}{x^2}-\frac{(x+y)^2}{y^2}$

560. $\frac{a-c}{b}-\frac{a-b}{c}$

561. $\frac{2a}{a^2-1}-\frac{2a}{a^2+1}$

562. $\frac{cx-c}{x-1}-\frac{cx+c}{x+1}$

563. $x^5-x^4+\frac{x^4+1}{x^2+1}$

564. $1-2n+\frac{n^3+2n^2+1}{n^2+2n+1}$

565. $\frac{a}{b}-a+b+ab$

566. $ab^2+b^3+\frac{2b^4}{a-b}$

567. $\frac{3}{5a}+\frac{4}{6a}$

568. $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}$

569. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}$

570. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{xy}{2ab}$

571. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{ab}{a^2-b^2}$

572. $\frac{12a}{a^6-1}+\frac{8a}{a^3-1}+\frac{4a}{a^3+1}$

573. $\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}$

574. $a^4+a^3+a^2+a+1-\frac{a+1}{a-1}$

575. $1-\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2$

576. $1-\frac{b^2-a^2}{c^2}$

577. $\frac{a+1}{2a-2}-\frac{a-1}{2a+2}$

578. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

579. $\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a^2-b^2}$

580. $\frac{a-b}{c+d}+1-\frac{a+b}{c-d}$

581. $\frac{ab+c}{d-1}-\frac{ab-c}{d}$

582. $\frac{6xy^2-6x^3-2y^3}{x^2y}-\frac{4xy^3-2x^2y^2-y^4}{x^2y^2}$

Efetuar as operações indicadas e reduzir

583. $\frac{1}{a^2}\times\frac{a^3}{b}$

584. $a^2x^2\times\frac{4}{a^4x^4}$

585. $17\times\frac{1}{34a^2x}$

586. $\frac{2a}{3b^2}\times\frac{5b}{a^2}$

587. $\frac{3y^3}{4x^4}\left(-\frac{3x^4}{4y}\right)$

588. $\frac{a^2-b^2}{2x}\times\frac{4x^2}{a^4-b^4}$

589. $\frac{a+b}{2}\times\frac{1}{a^2-b^2}$

590. $\frac{2a}{a-b}\times\frac{a^2-b^2}{a^2}$

591. $\frac{6a}{a+1}\times\frac{a^2-1}{3a^2}$

592. $\frac{a}{a-1}\times\frac{a^2-1}{a}\times\frac{a}{a+1}$

593. $\frac{3a-6}{2a}\times\frac{3a^2}{a-2}$

594. $\frac{a^2-b^2}{ax}\times\frac{a^2+b^2}{a^2x^2}$

595. $\frac{c}{a}\left(a-\frac{a^2}{c}\right)$

596. $\frac{a^2}{b^2}\left(ab^2-\frac{b^2}{a^2}\right)$

597. $\frac{x-y}{a-b}\times\frac{a^3+b^3}{x^3-y^3}$

598. $\frac{a^2-5a}{a+5}\times\frac{a^2-25}{a}$

599. $\frac{(a+b)^3}{5}\times\frac{c^4}{(a+b)^4}$

600. $\left(x^2-a+\frac{2a^2}{x^2+a}\right)(x^2+a)$

601. $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)$

602. $\left(a+b-\frac{1}{a+b}\right)\left(a-b+\frac{1}{a-b}\right)$

603. $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}\right)$

604. $\left(\frac{1+a}{1-a}-\frac{1-a}{1+a}\right)(1-a)$

605. $\frac{8x-2y}{x+y}\times\frac{16x^2+32xy+16y^2}{64x^2-4y^2}$

606. $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3\left(\frac{x^4-1}{x+1}\right)^2$

607. $\left(\frac{x}{a}\right)^3\left(\frac{a}{x}\right)^4$

608. $\left(\frac{a-1}{a^2-1}\right)^2$

609. $a\div\frac{m}{n}$

610. $\frac{a}{b}\div\left(-\frac{2}{5}\right)$

611. $\frac{a^2}{b^2}\div\frac{a^4}{b^4}$

612. $\frac{4a^2b^3}{c^5}\div\frac{16a^3b^4}{c^3}$

613. $9a^2b\div\left(-\frac{3a^4b^2}{c^2}\right)$

614. $x^2\div\left(-\frac{x}{y}\right)$

615. $abcd\div\frac{ab}{cd}$

616. $(x+y)\div\frac{x^2-y^2}{y}$

617. $\frac{a^2-b^2}{x+y}\div\frac{a-b}{x^2-y^2}$

618. $\frac{171(x^2-y^2)}{19x^2-18xy-y^2}\div\frac{9(x+y)}{y^2}$

619. $\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\div\frac{a+b}{x+y}$

620. $2.\frac{4-x^4}{3xy}\div(x^2+2)$

621. $4x^2y^2\div\frac{2ax^3}{y^2-ay}$

622. $\left(\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\right)\div\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)$

623. $\frac{5-3x}{4-2x}\div\left(\frac{5}{3}-x\right)$

624. $\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3}\div\frac{(a^2+b^2)^2}{(a+b)^4}$

625. $\frac{ab+b^2}{b^2}\div\frac{a+b}{a}$

626. $\left(a^2+2a+1-\frac{1}{a^2}\right)\div\left(a+1+\frac{a}{1}\right)$

Calcular o termo desconhecido de cada uma das proporções seguintes:

627. $\frac{63}{9}=\frac{126}{x}$

628. $\frac{64}{x}=\frac{x}{81}$

629. $\frac{x}{121}=\frac{625}{x}$

630. $\frac{x}{27}=\frac{3}{9}$

631. $\frac{12}{x}=\frac{44}{22}$

632. $\frac{x+a}{x+b}=\frac{3x+1}{3x-1}$

Reduzir á forma simples $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ cada uma das proporções seguintes:

633. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

634. $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$

635. $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$

636. $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}$

637. $\frac{a+2c}{b+2d}=\frac{3a-4c}{3b-4d}$

638. $\frac{4a+7c}{4b+7d}=\frac{9c-6a}{9d-6b}$

SEGUNDA PARTE

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRÁU

CAPITULO PRIMEIRO

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRÁU A UMA INCÓGNITA

I. Definições.

78. **Igualdade.** — *Igualdade* é a expressão de duas quantidades que têm mesmo valor numerico.

Identidade. — *Identidade* é uma igualdade evidente por si mesma : por exemplo :

$$10=10, \qquad a+b=a+b.$$

Identidade é ainda uma igualdade cujos dois membros tomam o mesmo valor numerico quaisquer que sejam os valores atribuidos ás letras.

Assim a expressão :

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$

é uma identidade, porque substituindo a e b por dois numeros quaisquer, 10 e 1, por exemplo, os dois membros tomam o mesmo valor numerico. Temos com efeito :

$$(10-1)^2=10^2-2.10.1+1^2=100-20+1,$$

ou $$81=81.$$

79. **Equação.** *Equação* é uma igualdade que existe só para um número *limitado* de valores atribuidos ás letras.

Assim a igualdade

$$5x-7=6x-14,$$

é uma equação, porque seus dois membros não se tornam identicos senão para $x=7$.

80. **Incógnita.** — Numa equação, distinguem-se *coeficientes* e *incógnitas*.

Na equação

$$11x-9=\frac{3x}{5}+43,$$

coeficientes são os numeros conhecidos $11, -9, \frac{3}{5}$ e 43 ; a incognita é x.

A incógnita é geralmente uma das últimas letras do alfabeto.

81. **Raises de uma equação.** — *Raises* de uma equação são os valores de uma incognita que transformam a equação em identidade.

A equação :

$$x+30=11x,$$

tem a rais 3, porque substituindo x por 3, a equação transforma-se na identidade :

$$3+30=11\times3, \quad \text{ou} \quad 33=33.$$

Resolver uma equação é achar-lhe as raises.

Gráu de uma equação é a soma dos expoentes das incognitas no termo em que esta soma é maior.

Os gráus das equações seguintes :

$$ax+b=c,$$
$$x^2-9x+20=0,$$
$$3x^2y^2-y^5+x-1=0,$$

são respetivamente : 1, 2 e 5.

82. **Função de** x. — *Quando uma quantidade, y por exemplo, depende de outra, x por exemplo, diz-se que y é função de x.*

Assim nas expressões :

$$y=2x+7,\quad y=3x^3-2x+8,\quad y=4x^3-5x^2+4,$$

y é função de x.

Diz-se que x é a *variavel independente* e y, a *variavel dependente*.

II. Principios sobre as equações.

83. **Principios gerais.** — A resolução das equações baseia-se nos dois principios seguintes, geramlente aceitos como axiomas :

1.º *Uma equação conserva as mesmas raises juntando-se ou tirando-se uma mesma quantidade aos dois membros ;*

2.º *Uma equação conserva as mesmas raises multiplicando-se ou dividindo-se os dois membros por uma mesma quantidade, nem nula, nem infinita.*

Resultam disso as duas regras seguintes :

84. **Regra para a transposição dos termos.** — *Numa equação, para passar um termo de um membro para o outro, é preciso suprimi-lo no membro onde está, e escrevê-lo no outro com o sinal contrário.*

Seja a equação

$$5x-3=2x+12.$$

Para passar para o segundo membro o termo -3, acrescenta-se $+3$ aos dois membros desta equação, que vem a ser :

$$5x-3+3=2x+12+3.$$

e, depois de simplificação :

$$5x=2x+12+3.$$

Para passar para o primeiro membro o termo $2x$, basta acrescentar $-2x$ aos dois membros da ultima equação, que vem a ser :

$$5x-2x=2x+12+3-2x,$$

e, depois de redução :

$$5x-2x=12+3.$$

Este resultado confirma a regra enunciada.

85. **Regra.** — *Para expelir os denominadores de uma equação, multiplica-se cada termo pelo produto de todos os denominadores.*

Exemplo : — 1º. *Seja eliminar os denominadores da equação :*

$$\frac{3x}{4}-5=100-\frac{3x}{5}.$$

Para aplicar a regra, multipliquemos cada termo pelo produto 5×4 dos denominadores ; a equação vem a ser :

$$\frac{3x\times5\times4}{4}-5\times5\times4=100\times5\times4-\frac{3x\times5\times4}{5},$$

ou ainda :

$$3x\times5-5\times5\times4=100\times5\times4-3x\times4.$$

2º *Eliminar os denominadores da equação :*

$$x-\frac{1}{3}=\frac{ax}{b}-\frac{x}{a}+1,$$

Se multiplicarmos todos os termos pelo produto $3ab$ dos denominadores, teremos :

$$3abx-\frac{3ab}{3}=\frac{3a^2bx}{b}-\frac{3abx}{a}+3ab,$$

que vem a ser, depois de simplificação :

$$3abx-ab=3a^2x-3bx+3ab.$$

86. **Corolário.** — *Pódem-se mudar os sinais de todos os termos de uma equação, pois equivale a multiplicar os dois membros por* -1.

III. Resolução das equações do primeiro gráu a uma incógnita.

87. **Regra.** — Para resolver uma equação do primeiro gráu a uma incógnita, é preciso :

1.º *Eliminar os denominadores e os parêntesis, se houver ;*

2.º *Passar para o primeiro membro os termos desconhecidos, e para o segundo membro os termos conhecidos ;*

3.º *Reduzir os termos conhecidos e pôr em factor a incógnita ;*

4.º *Dividir os dois membros pelo coeficiente da incógnita.*

Aplicações. — 1.° *Resolver a equação*

$$4x-7=2x+25.$$

Passando $2x$ para o primeiro membro e -7 para o segundo (84), temos :

$$4x-2x=25+7.$$

Depois de redução, esta equação vem a ser :

$$2x=32.$$

Dividindo os dois membros por 2, obtemos :

$$x=16.$$

Este valor de x é a rais da equação dada.

2° *Achar a rais da equação*

$$\frac{x}{2}-\frac{5x}{7}=-54+\frac{3x}{4}.$$

Expelindo os denominadores, esta equação vem a ser (87) :

$$28x-40x=-3024+42x.$$

Passando o termo $42x$ para o primeiro membro, e reduzindo, temos sucessivamente :

$$28x-40x-42x=-3024,$$
$$-54x=-3024.$$

Emfim, depois de mudar os sinais dos dois membros e dividir por 54, temos :

$$x=\frac{3024}{54}=56.$$

A raiz procurada é 56.

3° *Resolver a equação literal :*

$$ax-\frac{a}{c}=cx-\frac{c}{a}.$$

Expelindo os denominadores, esta equação dá :

$$a^2cx-a^2=ac^2x-c^2.$$

Transpondo os termos desta nova equação, temos :

$$a^2cx-ac^2x=a^2-c^2,$$

ou

$$x(a^2c-ac^2)=a^2-c^2.$$

Donde tiramos :

$$x=\frac{a^2-c^2}{a^2c-ac^2}=\frac{(a+c)(a-c)}{ac(a-c)}=\frac{a+c}{ac}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}.$$

EQUAÇÕES A RESOLVER

639. $x-3=0$
640. $5x-15=0$
641. $5x=10$
642. $4x=10-x$
643. $3x-2=16$
644. $-49x=-98$
645. $40-y=y$
646. $6x=880-5x$
647. $46-2x=18$
648. $25=100-3z$
649. $15=90-3z$
650. $16x-1920=0$
651. $0=2x-80$
652. $4x+44=64$
653. $80+2x-136=0$
654. $9x=300+8x$
655. $12v-66=v$
656. $y=12y-44$
657. $720y-2157=y$
658. $48-3y=5y$
659. $504-x-14=0$
660. $8x=x+14$
661. $x=340+11x$
662. $4x-45=5-6x$
663. $2x+3-(4x-9)=4$
664. $5(4x-7)-(3x-1)2=-5$
665. $(3x-2)4-7=(4x-5)5-22$
666. $50x-11x=4x-51x$
667. $9(x+1)+7(3-x)-38=0$
668. $4(4x-1)+3(7-6x)=16x+8$
669. $6x-17=13(x-1)-4$
670. $4(x-4)-1=3(2x-7)$
671. $12(x-3)+1=6(x+1)-5$
672. $33=3(10x-5)+2(3x-10x)$
673. $(y-60)+3y+2(3y+y)=0$
674. $(2s-7)-(7-s)-2s=0$
675. $7x-(3x+2x)-x=0$
676. $40x-1-60x+6=0$
677. $10z-16(200-z)=960$
678. $0=27+v-4(3+v)$
679. $40-u-5(12-u)=0$
680. $4500+60v=50(100+v)$
681. $3(4s-3)-(39+60s)=0$
682. $0=2(6-9m)-(5+3m)$
683. $84-19y=-7(60+y)$
684. $x-4(99-11x)-1584=0$
685. $-264+10x=2x$
686. $10x=52x-1344$
687. $90x+36=96x$
688. $492-12x=0$
689. $87200-9x=100x$
690. $50+x=60+3x$
691. $495=2x-(1-9x)+1$
692. $2(25+x)-3(2x-46)=0$
693. $y-2=-5(39-y)-3$
694. $3z-5(100-3z)=400$
695. $v-5(v-20)=0$
696. $50s=50-80(1-s)$
697. $4(120000-s)+10(120000-s)=1176000$
698. $17x-(7x-5)-(7000-20000)-49000=0$
699. $2x-(x+2)-(x-2)=x-10$

700. $\frac{x}{4}=9$

701. $\frac{4}{x}=2$

702. $\frac{x}{3}+\frac{x}{7}=20$

703. $3x-11+\frac{5x}{2}=0$

704. $\frac{x}{3}+7=62$

705. $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=5$

706. $84-x=\frac{2x}{5}$

707. $3+x=\frac{27+x}{4}$

708. $\frac{x}{176-x}=\frac{3}{5}$

709. $x+\frac{x}{2}=15$

710. $\frac{9x-48}{x}=5$

711. $\frac{x}{15}-\frac{200-x}{10}-600=0$

712. $120=\frac{(x+400)12}{100}$

713. $\frac{12-x}{x}=\frac{5}{7}$

714. $x=\frac{8(x+45)}{11}$

715. $\frac{21}{5y}=\frac{22}{5}-3$

716. $\frac{4x-13}{3}+1=x$

717. $\frac{3x-7}{3x-17}=-1$

718. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x+9700}{40}$

719. $\frac{3x-1}{4}-\frac{2x-1}{5}=\frac{10x-13}{20}$

720. $\frac{5x-2}{6x+1}=\frac{5x+2}{6x-1}$

721. $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}=7$

722. $0=x-872+\frac{9x}{100}$

723. $\frac{8x}{9}-\frac{5x}{6}-12=0$

724. $\frac{3x}{4}-\frac{3x}{5}-18=0$

725. $\frac{3x}{7}=10+\frac{x}{4}$

726. $x-\left(\frac{4x}{5}+15\right)=0$

727. $\frac{16y}{5}+\frac{3y}{2}=43+\frac{2y}{5}$

728. $\frac{y}{2}+\frac{y}{4}+\frac{y}{7}=y-12$

729. $\frac{z}{3}+\frac{2z}{7}+\frac{z}{4}+22-z=0$

730. $\frac{2v}{3}+7=v+3-\frac{v}{5}$

731. $2z-70=-\left(\frac{z}{2}+\frac{z}{4}+\frac{z}{6}\right)$

732. $\frac{4u}{5}+\frac{3u}{10}-\frac{u}{2}=24$

733. $u-\frac{2u}{3}+44=u+\frac{u}{4}$

734. $\frac{x-5}{9}=\frac{x-25}{5}$

735. $y-\frac{4y}{5}+39=y+\frac{y}{2}$

736. $9+\frac{7x-54}{5}=27-x$

737. $\frac{23-x}{5}+\frac{x-1}{7}+\frac{4-x}{4}=7$

738. $\frac{5y+3}{3}+\frac{3y-4}{7}-43+5y=0$

739. $3v-14+\frac{2v+7}{3}=\frac{5v-7}{2}$

740. $m-\frac{m}{2}=6+\frac{m}{8}$

741. $\frac{3x-2}{2x-3}\times5=\frac{35}{3}$

742. $x-\frac{3x}{4}+\left(\frac{x-10}{4}\right)\frac{2}{3}=450$

743. $\frac{6}{x}-\frac{12}{2x}+\frac{144}{3x}=4$

744. $\frac{x}{a}=b$

745. $x-a=b$

746. $x-a=a-x$

747. $\frac{a}{x}=b$

748. $\frac{a}{x}=\frac{1}{b}$

749. $ax=b$

750. $ax-\frac{1}{b}=0$

751. $a+x=2x+b$

752. $ax+bx-c=0$

753. $\frac{x}{a}-1=0$

754. $\frac{x}{a}-1=3-\frac{x}{a}$

755. $\frac{a+x}{b}=\frac{b+x}{a}$

756. $\frac{1}{x-a}=\frac{3}{a-x}$

757. $\frac{ax-b}{c}=bx$

758. $\frac{x}{7}+\frac{x}{6}=m$

759. $ax-c+bx=2ax-d-$ [illegible]

760. $\frac{x-b}{x-c}=\frac{a-b}{a-c}$

761. $\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{b}{a}$

762. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$

763. $a^2(a-x)-b^2(b+x)=abx$

764. $x-a+b(x-a)+a(c-x)+a^2-cx=0$

765. $3(x-a)-(x+a)=0$

766. $\frac{x-b}{a-b}+\frac{x-c}{a-c}=2$

767. $\frac{a+b}{x-a}=\frac{a}{x-a}+b$

768. $\frac{x-a}{b^2}+\frac{x-b}{a^2}=\frac{x}{ab}$

769. $\frac{x+a}{a-b}+\frac{x-a}{a+b}=\frac{x+b}{a+b}+\frac{2(x-b)}{a-b}$

770. $x+\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{1}{a}=a^2+a+1+\frac{x}{a^3}$

771. $\frac{a(y-1)}{2}+\frac{b(y-1)}{3}+y=1$

772. $a(z-b)-b(a-z)+z(a+b)=0$

773. $a^2\left(1-\frac{a}{x}\right)+b^2\left(-1-\frac{b}{x}\right)=ab$

774. $\frac{z}{a}-\frac{z}{b}-a+b=0$

775. $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}=c$

776. $\frac{x}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b}{a}-\frac{x}{b}$

777. $a\left(\frac{a-x}{b}\right)=\frac{b(b+x)+ax}{a}$

778. $\frac{m(y-m)}{n}+\frac{n(y-n)}{m}=y$

779. $\frac{m}{n}\left(\frac{z-m}{z}\right)+\frac{n}{m}\left(\frac{z-n}{z}\right)=1$

780. $\frac{\frac{1}{n}}{x+\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$

781. $b+\frac{m+n}{x}=a+\frac{m-n}{x}$

782. $\frac{x-a}{a-b}-\frac{x-a}{a+b}=\frac{2ax}{a^2-b^2}$

CAPITULO II

PROBLEMAS DO PRIMEIRO GRÁU A UMA INCÓGNITA

I. Pôr os problemas em equação.

88. **Definição.** — *Pôr um problema em equação é* exprimir por meio de sinais algebricos as relações que o enunciado supõe entre os números conhecidos e os números desconhecidos do problema.

Regra para pôr em equação. — *Para pôr um problema em equação, representa-se por uma letra cada uma das quantidades desconhecidas; depois, indicam-se, por meio de sinais algebricos, todas as operações necessárias para verificar a exatidão da resposta, se fôsse conhecida.*

Alguns exemplos mostrarão o modo de aplicar esta regra.

II. Resolução de alguns problemas.

89. **Problema I.** — *Qual é o número que aumentado de 20, se torna o triplo do que era antes?*

Seja x este numero. A x acrescentando 20, obtemos tres vezes o numero procurado ou $3x$. Donde a equação do problema:

$$x+20=3x$$

Resolvendo esta equação (87), vem:

$$x=10$$

O número procurado é 10.

90. **Problema II.** — *Como pagar a quantia de 118$ com 35 notas, umas de 5$ e outras de 2$?*

Seja x o numero das notas de 5$; o numero das notas de 2$ será $35-x$.

As x notas de 5$ valem $5x$$, e as $35-x$ notas de 2$ valem $(35-x)2$$. Podemos escrever a equação:

$$5x+(35-x)2=118,$$

cuja raís é (nº 87):

$$x=16.$$

É preciso dar 16 notas de 5$ e 35—16 ou 19 notas de 2$.

91. **Problema III.** — *Uma pessôa gastou o décimo, os dois quintos e o quarto de seu haver, mais 25$. Depois, não lhe fica mais nada. Quanto tinha primitivamente?*

Seja x o haver desta pessôa; ela gastou:

$$\frac{x}{10}+\frac{2x}{5}+\frac{x}{4}+25\$.$$

Como gastou tudo, seu haver é exatamente a soma de suas despezas; a equação do problema é:

$$x=\frac{x}{10}+\frac{2x}{5}+\frac{x}{4}+25.$$

Resolvendo esta equação, vem (nº 87):

$$x=100.$$

Esta pessôa possuia 100$.

92. **Problema IV.** — *Um pai tem 40 anos e seu filho 15. Daqui a quantos anos a idade do pai será dupla da idade do filho?*

Seja x o numero dos anos que hão de decorrer até que a idade do pai seja dupla da idade do filho. Quando o pai alcançar esta idade, êle terá $40+x$ anos, e o filho $15+x$ anos.

Podemos escrever:

$$40+x=2(15+x).$$

É a equação do problema; dá: $x=10$.

É facil verificar que, daqui a 10 anos, a idade do pai será o dobro da idade do filho.

93. **Problema V.** — *Um trem sai do Rio de Janeiro para São Paulo com uma velocidade de 45 km por hora. Uma hora depois, outro trem sai do Rio, atraz do primeiro, com uma velocidade de 50 km por hora. Depois de quantas horas e a que distância do Rio se dará o encontro?*

Seja x o numero de horas que levará o segundo trem para alcançar o primeiro. Durante este numero de horas, o segundo trem percorrerá $50x$ km. e o primeiro, $45x$ km.

O segundo trem, para alcançar o primeiro, deverá percorrer primeiro os 45 km. de adiantamento do primeiro, mais $45x$ km. De sorte que temos :

$$50x=45+45x.$$

Donde se tira : $x=9$.

O encontro se dará a $50\times 9=450$ km do Rio, e depois de 9 horas de caminho.

94. **Problema VI.** — *Um negociante emprestou dois capitais a juros simples. O primeiro rende 4 % por ano e o segundo, que excede o primeiro de 4:000$, rende 5 %. Achar estes dois capitais sabendo que, depois de um ano, juntos aos juros, valem reunidos 20:920$*

Seja x o primeiro capital ; os juros anuais serão :

$$\frac{x\times 4}{100}.$$

O segundo capital, tendo 4:000$ mais do que o primeiro, será $x+$4:000$, e seus juros anuais serão :

$$\frac{(x+4000)5}{100},$$

A soma dos dois capitais, ou $x+(x+4000)$, acrescentada aos juros, deve ser igual a 20:920$.

Temos a equação :

$$x+(x+4000)+\frac{x\times 4}{100}+\frac{(x+4000)5}{100}=20920.$$

A resolução desta equação dá $x=$8:000$.

O primeiro capital é 8:000$ e o segundo :

$$8:000+4:000=12:000\$.$$

95. **Problema VII.** — *Um pai distribue certa quantia a seus filhos. Ao primeiro dá a$ e 1/n do resto ; ao segundo dá 2a$ e 1/n do resto ; ao terceiro dá 3a$ e 1/n do resto, e assim por diante. Sabendo que todos os filhos receberam a mesma quantia, pede-se : 1.º a quantia repartida ; 2.º a parte de cada um ; 3.º o número dos filhos.*

Seja x a quantia repartida. A parte do primeiro será :

$$a+\frac{1}{n}(x-a) \quad \text{ou} \quad \frac{na+x-a}{n}.$$

A do segundo será :

$$2a+\frac{1}{n} \text{ do resto.}$$

Este resto é x diminuido da parte do primeiro e de $2a$, ou :

$$x-\frac{na+x-a}{n}-2a.$$

A segunda parte é pois :

$$2a+\frac{1}{n}\left(x-\frac{na+x-a}{n}-2a\right),$$

ou, reduzindo tudo ao mesmo denominador :

$$\frac{2an^2+nx-x+a-3na}{n^2}.$$

E igualando entre si as partes dos dois primeiros filhos, temos a equação :

$$\frac{na+x-a}{n}=\frac{2an^2+nx-x+a-3na}{n^2}.$$

Resolvendo esta equação, obtemos :

$$x=an^2-2na+a=a(n^2-2n+1)=a(n-1)^2.$$

A quantia repartida é pois $a(n-1)^2$.

A parte de cada um é :

$$\frac{na-a+x}{n}=\frac{na-a+a(n-1)^2}{n}=a(n-1).$$

O numero dos filhos é igual ao numero das partes, ou a :

$$\frac{a(n-1)^2}{a(n-1)}=n-1.$$

RESOLVER OS SEGUINTES PROBLEMAS

783. O terço e a metade de um número fazem juntos 860 ; qual é esse número ?

784. Qual é o número cujo 1/25 aumentado de 600, dá 1000 para soma ?

785. Qual é o número cujo 1/3 junto ao 1/4, faz 35 ?

786. Os 3/4 de um número juntos a seus 5/6 fazem 494. Qual é esse número ?

787. Os 5/6 do preço de uma propriedade diminuidos de 3:000$, valem 563:000$. Qual é o preço da propriedade ?

788. Achar o número cujo 1/3 excede o 1/4 de 512.

789. Qual é o número cujos 3/8, diminuidos de 72, fazem 159 ?

790. Achar a fortuna de um homem que gastou os 54/79, e fica com 7:900$.

791. Qual é o número que excede seus 3/4 de 144 ?

792. Os 2/3 dos 3/4 de um número, aumentados dos 8/9, valem 25. Achar este numero.

793. Os 2/5 do preço de uma faca, subtraidos de 12$ dão um resto igual aos 4/5 desse mesmo preço. Quanto custa a faca ?

794. Qual é o número cuja metade, aumentada de 30, iguala os 3/4 desse mesmo número, aumentados de 5 ?

795. Triplicando o preço de um dia de trabalho de um operario e dividindo o resultado por 7, faz-se perder 3$ ao operario. Quanto ganha por dia ?

796. Um pai deixa os 2/3 de seus bens a um de seus filhos, os 5/16 ao segundo e 640$ ao 3.º. Achar a quantia repartida.

797. Se tivesse outro tanto como tenho, mais a metade do que tenho, mais o quarto e mais 1$, teria 100$. Quanto tenho ?

798. Que número se deve acrescentar aos dois termos da fração 19/163 para torná-la igual a 1/7 ?

799. O dobro de minha idade, aumentado da metade, dos 2/5, dos 2/10 dela e de 40, fazem 200 anos. Achar minha idade.

800. De certo número de laranjas Paulo deu a metade, comeu o decimo e fica ainda com 200. Quantas tinha primeiro ?

801. Que horas são, se o que fica do dia vale os 9/15 do que já passou ?

802. Os 3/4 de um número excedem 21 de tantas unidades quantas os 7/11 dêle são inferiores a 40. Qual é esse numero ?

803. Daqui a 3 anos 1/3, minha idade terá aumentado de seu sexto. Qual é minha idade ?

804. Comprei um relogio, cujo triplo do preço, subtraido de 250$, dá um resto igual ao dobro do mesmo preço. Achar o preço deste relogio.

805. Num pomar, a metade das arvores são macieiras, o quarto mangueiras e o sexto laranjeiras ; ha ainda 50 cerejeiras. Quantas arvores ha no pomar ?

806. Um fazendeiro vendeu o 1/3 da sua colheita de café, depois os 4/7 do resto. Quantos sacos de café colheu, se fica ainda com 100 sacos ?

807. Faltam-me 3$ para comprar uma caixa de compassos ; se custasse 1/3 a menos, teria 16$ de sobra. Achar o preço da caixa ?

808. Achar o número de alunos de uma aula se 1/3 dêles está lendo, 1/4 escrevendo e os 20 restantes fazendo contas.

809. Um negociante comprou 42 met. de linho por 336$. Por quanto deve vender o metro para lucrar 1/9 do preço de venda ?

810. A soma de dois números é 32 e o menor é o 1/7 do maior. Quais são êles ?

811. A diferença de 2 números é 565, o quociente 5 e o resto de sua divisão 85. Quais são êles ?

812. Um jardineiro deixa a um amigo 1/2 dos pêcegos que colheu ; dá o 1/4 do resto a outro e chega em casa com 6 pêcegos. Quantos colhêra ?

813. Um pastor compra 24 ovelhas e outros tantos cordeiros ; um cordeiro vale 8$ menos do que uma ovelha. Qual é o preço de cada animal, se pagou 1:152$ ao todo ?

814. Um carteiro dizia : « Se eu tivesse distribuido o terço, o quarto e os 2/5 do dobro das cartas que recebi no correio, mais 50 cartas, eu teria distribuido 640. » Quantas cartas distribuiu o carteiro ?

815. Um homem recebeu 2:400$ por um cavalo e um jumento ; o jumento vale os 7/8 do cavalo. Qual é o preço de cada animal ?

816. Um pai tem 5 vezes a idade do filho e daqui a 6 anos não terá mais senão 3 vezes esta idade. Quantos anos tem cada um ?

817. Repartir 540 em duas partes proporcionais a 5 e 4.

818. Recebendo o que me é devido, pagaria o que devo e ficaria com os 2/9 do que me é devido. Quanto devo e quanto me é devido, se estas duas quantias juntas fazem 2:000$?

819. Vendendo certo número de peças de fita a 2$500 o metro, um negociante lucraria 90$; vendendo-as a 2$800, lucraria 345$. Quantos metros têm as peças ?

820. Cada ano um negociante aumenta sua fortuna dos 3/5 dela ; então retira 1:200$ para sua despeza. No fim do segundo ano, depois de retirar 1:200$ para sua despeza e 1:380$ para os pobres, tem a fotrtuna duplicada. Quanto tinha no principio ?

821. Uma quantia de 8:680$ é formada de notas de 10$ e de 5$. O numero das notas de 10$ está para o das de 5$ como 35 está para 54. Quantas notas ha de cada especie ?

822. João comprou os 44/50 de uma peça de casimira a 12$ o metro ; vendendo-os a 14$ lucra 176$. Quantos metros comprou, qual é o comprimento da peça e qual é o preço de compra ?

823. Cheio de agura pura, um vaso pesa 14 kg. ; tirando-lhe os 3/4 da agua, não pesa mais que 5 kg. Achar o peso do vaso e a quantidade de agua que encerra ?

824. Dois pastores compararam 30 ovelhas. O 1.º não póde dar senão o 1/4 da quantia necessaria para pagá-las, e o outro apenas o 1/5. Qual é o preço de uma ovelha, se faltam ainda 495$ aos dois haveres juntos para pagar as ovelhas ?

825. Repartem-se 790$por quatro pessôas. A 1.ª deve receber 1/4 mais do que a segunda ; a 2.ª deve ter 1/4 mais do que a 3.ª ; e esta 1/3 mais do que a 4.ª. Quais são as quatro partes ?

826. Achar dois numeros cuja razão seja 1/2, e tais que, aumentando cada um de 40, a nova razão seja 5/8.

827. Um homem vende a uma primeira pessôa a 1/2 de suas laranjas mais 1/2 laranja ; a uma 2.ª pessôa vende a 1/2 do resto mais 1/2 laranja ; a uma 3.ª pessôa vende a 1/2 do resto mais 1/2 laranja. Depois disso ficam-lhe 3 laranjas. Quantas laranjas tinha e quantas vendeu a cada pessôa ?

828. Obrigado a dar esmola, um avarento responde : « Se me duplicam o haver, darei 6$, e cada vez que o duplicarem acrescentarei 1$ à esmola precedente. » Aceita-se a proposição ; mas para a quarta esmola faltam-lhe 5$. Quanto tinha o avarento ?

829. Um homem possúe certo número de tostões ; colocando-os em pilhas de 19 tostões, tem 12 de sobra ; colocando-os em pilhas de 27 tostões, tem 1 de sobra e quinze pilhas menos do que no 1.º caso. Quantos tostões tem este homem ?

830. Em um jogo de tiro ao alvo, um jogador tem que dar 20 tiros. Recebe $500 cada vez que acerta ; mas paga $750 cada vez que erra. Depois dos 20 tiros não perdeu, nem ganhou nada. Quantas vezes acertou o alvo ?

831. Um fazendeiro promete a seu pastorzinho 140$ e 4 ovelhas para o ano. Depois de 4 mezes, o pastorzinho é despedido e recebe 3 ovelhas e 5$. Qual é o preço de uma ovelha ?

832. Um trabalho póde-se fazer em 2 horas por um homem, em 3 horas por uma mulher, e em 6 horas por um menino. Em quanto tempo será feito pelas 3 pessôas juntas ?

833. Dois operarios levam 12 horas para fazer um trabalho ; o 1.º só levaria 20 horas. Que tempo levaria o 2.º trabalhando só ?

834. Uma torneira enche um tanque em 10 horas ; outra torneira o vasa em 15 horas. Vasio o tanque, que tempo levarão as duas tornairas abertas para enchê-lo ?

835. Um homem morrendo deixa a mesma quantia a cada um de seus filhos. O mais velho recebe 40:000$ mais o 1/6 do resto ; o 2º recebe 80:000$ mais o 1/6 do resto ; o 3.º, 120:000$ mais o sexto do resto, e assim por diante. Achar a quantia repartida, o numero de filhos, e a parte de cada um ?

836. Em que proporção se deve misturar vinho de $800 o litro com vinho de $500 para se obter vinho de $600 o litro ?

837. Um negociante tem vinho de $600 o litro. Que proporção de agua deve lhe acrescentar para que a mistura valha $500 o litro ?

838. Um ourives tem 9 kg de prata do toque de 0,950. Que peso de cobre deve acrescentar para que o toque seja 0,900 ?

839. Uma liga de ouro do peso de 300 gr. tem o toque de 0,900. Quantos gramas de uma barra de ouro do toque de 0,700 se lhe devem acrescentar para se obter uma liga do toque de 0,850 ?

840. Cem kg de agua salgada contêm 8.500 gr. de sel. Quantos kg de agua para se lhe devem acrescentar para que 200 kg de mistura contenham apenas 5.000 gr. de sal ?

841. É meio-dia. A que horas se darão os encontros sucessivos dos dois ponteiros de um relogio ?

842. Que horas são quando os dois ponteiros de um relogio estão sobrepostos entre 7 e 8 horas ?

843. Que horas são quando os dois ponteiros de um relogio estão no prolongamento um do outro entre 4 e 5 horas ?

844. Duas letras, uma de 8:000$ com o praso de 4 mezes e outra de 1:800$ com o praso de 20 mezes, descontadas por fóra, sofreram 947$ de desconto. Qual é a taxa do desconto ?

845. Dois comboios cujas velocidades respetivas são 48 e 52 km por hora, partem no mesmo tempo de duas estações distantes de 500 km e vão ao encontro um do outro. Quantas horas levarão para se encontrar e qual será o caminho que percorrerá cada um ?

846. Ás 4 horas da manhã um trem sai do Rio de Janeiro para São Paulo com uma velocidade de 50 km por hora. Ás 5 horas sai do Rio para a mesma direção outro trem andando 60 km por hora. Que tempo leva o 2.º trem para alcançar o 1.º, e qual é o espaço percorrido ?

847. Uma raposa está adiantada de 60 pulos sobre um cão que a persegue. Emquanto o cão dá 4 pulos a raposa dá 5 ; mas 3 pulos do cão valem 5 pulos da raposa. Quantos pulos dará o cão para alcançar a raposa ?

PROBLEMAS LITERAIS

848. Repartir um número a em duas partes tais que m vezes a 1.ª mais n vezes a 2.ª, façam ma.

849. Achar dois números consecutivos cuja diferença dos quadrados seja $4a+1$.

850. Que horas são, se o que resta do dia vale m vezes o que já passou.

851. Achar um número cujo terço mais a metade, façam $10a$.

852. Achar um número que, acrescentado a a ou a $2a$, dê dois números que estejam entre si como 2 está para 3.

853. Achar um número que exceda $2a$ de outro tanto como $3a/2$ excede o 1/6 deste número ?

854. Qual é o número que iguala m vezes sua raís quadrada ?

855. Que número se deve acrescentar a cada termo da fração a/b para se obter $3a/2b$?

856. Um pai tem n vezes a idade do filho, e a soma de suas idades é a $(n+1)$. Quais são as duas idades ?

857. A idade de um homem é a, e a do filho é b. Daqui a quanto tempo a idade do pai valerá m vezes a idade do filho ?

858. Um objeto custou $a$$; por quanto se deve vender para se lucrar b 0/0 sobre o preço da venda ?

859. Achar uma proporção cujos termos sejam inferiores de uma mesma quantidade aos quatro numeros a, $2a$, $4a$, $9a$.

860. Repartir o número a em duas partes cuja diferença dos quadrados seja $2a-a^2$.

861. Que número se deve acrescentar aos dois termos da fração $\frac{1}{a}$ para que venha a igualar $\frac{a-1}{a+1}$?

862. Haviam de votar a pessôas. Tres candidatos se apresentaram ; o 1.º obteve m votos mais do que o segundo, e o 2.º obteve n votos mais do que o 3.º. Quantos votos obteve cada candidato se houve 3 abstenções ?

863. Um criado ganha no ano $a$$ e um terno de roupa. Depois de n mezes, é despedido, e recebe $b$$ e o terno de roupa. Quanto vale o terno ?

864. Uma torneira póde encher um tanque em a horas ; outra torneira póde enchê-lo em b horas ; uma terceira póde vasà-lo em $a+b$ horas. Vasio o tanque e abertas as 3 torneiras, que tempo levam para enchêlo ?

865. Dois correios têm por velocidades respectivas v e v' ; seguem a mesma direção e acham-se separados por uma distancia d ; daqui a quanto tempo hão de se encontrar ?

866. Quantos Hl de vinho de $a$$ se devem misturar com vinho de $b$$, para se obter vinho de $d$$ o Hl ?

867. Duas barras de prata têm por toques respetivos t e t'. Que peso se deve tomar de cada uma para se obter um peso P do toque T ?

PROBLEMAS DE GEOMETRIA

868. Os ângulos de um triângulo formam uma progressão aritmética de razão 15º. Achar os 3 ângulos.

869. Achar os ângulos de um pentágono, sabendo que formam uma progressão aritmética de razão 10º.

870. Numa circumferência, um arco de 36º tem 4 m. de comprimento. Achar o raio desta curva.

871. Dividir uma rêta de 10 m. em partes proporcionais a 3 e 7.

872. Qual é o número de gráus e o comprimento de um arco de circulo de 10 m. de raio se o sector correspondente tem 100 m² de superficie ?

873. Num triângulo dado, inscrever um retângulo que tenha d m. de diferença entre as duas dimensões.

874. A soma dos ângulos de um poligono é 28 retos. Quantos lados tem o poligono ?

875. Os lados AB, BC, AC de um triângulo valem respetivamente 36, 48 e 54 met. Sobre AB toma-se um comprimento AD=10 m; e, pelo ponto D traça-se uma paralela DE ao lado AC e uma paralela DH a BC. Calcular DH, DE, AH, CH, BE e CE.

876. Qual é o ângulo de um poligono regular se a soma dos ângulos é 1440º ?

877. Os lados de um triângulo têm 102, 150 e 210 m. ; calcular os segmentos determinados sobre cada lado pelas bissetrizes interiores e pelas bissetrizes exteriores.

878. Dados os 3 lados a, b, c e as alturas h, h', h'' de um triângulo, calcular os lados dos quadrados inscritos.

879. Num trapézio a altura é 20 m. e a superficie 200 m². Quais são as duas bases se a maior vale 3 vezes a menor ?

880. Os lados de um triângulo têm 30, 40, 50 m. ; calcular os segmentos determinados sobre cada lado pelos contatos do circulo inscrito e dos circulos ex-inscritos ?

881. No mesmo triângulo calcular o raio do circulo inscrito e os raios dos circulos ex-inscritos ?

882. Numa corôa de superficie πa^2, calcular os dois raios se têm 1 m. de diferença.

CAPITULO III

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRÁU A VARIAS INCÓGNITAS

I. Definições.

96. **Equações equivalentes.** — *Equações equivalentes são várias equações que têm as mesmas raises.*

Assim as duas equações :

$$\frac{x}{4}-15=\frac{x}{10} \quad e \quad \frac{9x}{5}=2x-20,$$

são equivalentes, porque têm a mesma rais, $x=100$.

Sistema de equações simultaneas. — Quando várias equações são equivalentes, o seu conjunto tem o nome de *sistema de equações simultaneas.* Por exemplo, as tres equações equivalentes :

$$x+y-z=8$$
$$x-y+z=12$$
$$y-x+z=16$$

formam um sistema de equações simultaneas, porque são todas verificadas simultaneamente por :

$$x=10 \quad y=12 \quad e \quad z=14.$$

97. **Resolução de um sistema.** — Resolver um sistema de equações simultaneas, é achar as raises das equações deste sistema.

O conjunto das raises chama-se *solução* do sistema.

Eliminação de uma incógnita. — Eliminar uma incógnita entre varias equações simultaneas, é achar um sistema equivalente ao primeiro, que tenha uma equação e uma incógnita a menos. Os principais metodos de eliminação são os seguintes :

1.º *Por substituição;*

2.º *Por comparação* ou *igualação;*

3.º *Por redução ao mesmo coeficiente* (ou por adição e subtração) ;

4.º *Pelo metodo de Bezout* ou *dos coeficientes indeterminados.*

II. Eliminação por substituição.

98. **Regra.** — Para se resolver um sistema de equações pelo metodo de substituição, procede-se do modo seguinte :

1.º *De uma das equações dadas, tira-se o valor de uma incógnita em função das outras; leva-se este valor em todas as outras equações do sistema; vem um novo sistema com uma incógnita e uma equação a menos.*

2.º *De uma das equações deste novo sistema, tira-se o valor de uma das incógnitas, e leva-se este valor em todas as outras equações; vem um terceiro sistema com duas incógnitas e duas equações a menos do que o primeiro.*

3.º *Continúa-se do mesmo modo até ficar uma só equação a uma incógnita, que se resolve* (n.º 87).

4.º *Numa das duas equações do sistema precedente, leva-se o valor desta incógnita e obtem-se o valor de uma nova incógnita. Numa das tres equações do penultimo sistema, levam-se os valores de suas incógnitas, e determina-se o valor de uma terceira incógnita. Retrocede-se assim até o sistema dado, e obtem-se a solução deste sistema.*

Aplicação. — *Resolver o sistema.*

$$x+3y=92, \qquad 4x-y=56.$$

Resolvendo-se a primeira equação em relação a x, ou considerando-se y como uma quantidade conhecida, obtem-se :

$$x=92-3y. \qquad (1)$$

Levando-se este valor para a segunda equação do sistema dado, ela vem a ser :

$$4(92-3y)-y=56 \quad ou \quad 13y=312.$$

Esta ultima equação dá $y=24$.

Levando-se este valor de y para a equação (1), vem

$$x=92-3\times24=20.$$

A solução do sistema dado é $x=20$, $y=24$.

Regra. — *Para se resolver por substituição um sistema de 2 equações a 2 incógnitas :*

1.º *Tira-se o valor de* x *da* 1.ª *equação e leva-se este valor na* 2.ª *equação; vem uma equação a uma só incógnita* y *que se resolve;*

2.º *Leva-se o valor de* y *na equação que dá* x *e vem o valor de* x.

Aplicação. — *Resolver o sistema*

$$2x-3y+4z=20,$$
$$4x+2y-3z=11,$$
$$3x+4y+2z=53.$$

Tira-se da primeira equação

$$x=\frac{20+3y-4z}{2}. \qquad (1)$$

Levando-se este valor para as duas outras, elas dão :

$$\frac{4(20+3y-4z)}{2}+2y-3z=11,$$
$$\frac{3(20+3y-4z)}{2}+4y+2z=53,$$

ou, simplificando,

$$11z-8y=29,$$
$$8z-17y=-46.$$

Estas duas equações contêm só as duas incógnitas y e z. A primeira dá

$$z=\frac{29+8y}{11}. \qquad (2)$$

Substituindo-se este valor a z na equação

$$8z-17y=-46,$$

ela vem a ser :

$$\frac{8(29+8y)}{11}-17y=-46.$$

Donde se tira

$$y=6.$$

Para obter z, substituamos y por 6 na equação (2), teremos

$$z=\frac{29+8\times 6}{11}=7.$$

Levando para (1) os valores de z e de y, achamos

$$x=\frac{20+3.6-4\times 7}{2}=5.$$

O sistema dado tem pois a solução :

$$x=5, \quad y=6, \quad z=7.$$

Regra. — *Para se resolver por substituição um sistema de 3 equações a 3 incógnitas :*

1.º *Tira-se o valor de* x *da* 1.ª *equação e leva-se este valor nas 2 outras equações ; vem um sistema de 2 equações a 2 incógnitas* y *e* z *que se resolve ;*

2.º *Levam-se os valores de* y *e* z *na equação que dá* x *e vem o valor de* x.

III. Eliminação por comparação ou igualação.

99. **Regra.** — Para se resolver um sistema de equações pelo método de comparação, procede-se do modo seguinte :

1.º *Tira-se o valor de uma mesma incógnita de todas as equações que a encerram, e igualam-se estes valores dois a dois. O conjunto das equações que não encerram mais esta incógnita, forma um sistema com uma equação e uma incógnita a menos do que o proposto.*

2.º *Neste novo sistema, tira-se o valor de uma incógnita de todas as equações que a encerram, e igualam-se estes valores dois a dois. O conjunto das equações que não têm mais esta incógnita, forma um terceiro sistema com duas equações e duas incógnitas a menos do que o proposto.*

3.º *Continúa-se até ficar apenas uma só equação a uma só incógnita que se resolve* (n.º 87).

Aplicação. — *Resolver o sistema*

$$4x-3y=4, \quad 3x+4y=78.$$

Tirando o valor de x de cada equação, vem :

$$x=\frac{4+3y}{4}, \qquad (1)$$
$$x=\frac{78-4y}{3}.$$

Estes dois valores são iguais ; temos a equação :

$$\frac{4+3y}{4}=\frac{78-4y}{3},$$

cuja raís é $y=12$.

Teremos x, levando o valor de y numa das equações (1) que estão resolvidas em relação a x. A primeira dá

$$x=\frac{4+3.12}{4}=10.$$

O sistema proposto tem a solução

$$x=10, \quad y=12.$$

Regra. — *Para se resolver por comparação um sistema de 2 equações a 2 incógnitas :*

1.º *Tira-se o valor de* x *de cada equação e igualam-se esses valores ; vem uma equação a uma só incógnita* y, *que se resolve ;*

2.º *Leva-se o valor de* y *numa das 2 equações que dão* x *e vem o valor de* x.

Aplicação. — *Resolver o sistema*

$$x-2y+3z=8,$$
$$2x-3y+z=-1,$$
$$3x-y+2z=11.$$

Os valores de x tirados deste sistema são : (1)

$$x=8+2y-3z,$$
$$x=\frac{-1+3y-z}{2},$$
$$x=\frac{11+y-2z}{3}.$$

Igualando-os dois a dois, temos as duas equações :

$$8+2y-3z=\frac{-1+3y-z}{2},$$
$$8+2y-3z=\frac{11+y-2z}{3},$$

que se reduzem ás seguintes por simplificação :

$$y-5z=-17, \quad 5y-7z=-13.$$

Os valores de y tirados deste novo sistema são : (2)

$$y=5z-17,$$
$$y=\frac{7z-13}{5}.$$

Estes dois valores dão a equação

$$5z-17=\frac{7z-13}{5}.$$

cuja raís é $z=4$.

Para este valor de z, a primeira das equações (2) vem a ser

$$y=5z-17=5.4-17=3.$$

Para $y=3$ e $z=4$, a primeira das equações (1) dá

$$x=8+2y-3z=8+2.3-3.4=2.$$

A solução do sistema proposto é

$$x=2, \quad y=3, \quad z=4.$$

Regra. — *Para se resolver por comparação um sistema de 3 equações a 3 incógnitas :*

1.º *Tiram-se os valores de* x *das 3 equações dadas e igualam-se esses valores 2 a 2 ; vem um sistema de 2 equações a 2 incógnitas* y *e* z *que se resolve ;*

2.º *Levam-se os valores de* y *e* z *numa das equações que dão* x *e vem o valor de* x.

IV. Eliminação por redução ao mesmo coeficiente.

100. **Regra.** — Para se resolver um sistema pelo metodo de redução ao mesmo coeficiente, é preciso :

1.º *Dar a uma das incógnitas o mesmo coeficiente em todas as equações ; depois, somar ou subtrair estas equações duas a duas de modo a fazer desaparecer a incógnita. Obtem-se um sistema com uma incógnita e uma equação a menos do que o proposto.*

2.º *Do mesmo modo faz-se desaparecer uma nova incógnita no novo sistema. Continua-se deste modo e vem afinal uma equação com uma só incógnita que se resolve* (n.º 87).

Aplicação. — *Resolver o sistema de equações*

$$y-2x=8, \quad (1)$$
$$3y+x=66. \quad (2)$$

Demos a x o mesmo coeficiente nas duas equações ; para isso, multipliquemos por 2 os dois membros da segunda. Ela vem a ser :

$$6y+2x=132. \quad (3)$$

Somando as equações (1) e (3), os termos em x desaparecem e obtemos

$$y-2x+6y+2x=8+132,$$

ou ainda

$$7y=140.$$

Desta equação, tiramos

$$y=20.$$

Este valor de y levado em (2) dá

$$x=66-3y=66-3.20=6.$$

A solução deste sistema é :

$$x=6, \quad y=20.$$

Regra. — *Para se resolver por redução um sistema de 2 equações a 2 incógnitas :*

1.º *Dá-se a* x *o mesmo coeficiente e de sinais contrários nas 2 equações e somam-se essas equações ; vem uma equação a uma só incógnita* y *que se resolve ;*

2.º *Leva-se o valor de* y *numa das 2 primeiras equações e vem o valor de* x.

Aplicação. — *Resolver o sistema*

$$2x+3y+z=8,$$
$$5x-2y-2z=1,$$
$$11x+4y+5z=19.$$

Para darmos a z o mesmo coeficiente nestas tres equações, multipliquemos cada uma pelo produto dos coeficientes de z nas duas outras equações. Temos que multiplicar as tres equações respetivamente por 2×5, 5, 2, e obtemos

$$\begin{aligned} 20x+30y+10z&=80,\\ 25x-10y-10z&=5, \qquad (1)\\ 22x+8y+10z&=38. \end{aligned}$$

Somando separadamente as duas primeiras e as duas ultimas, temos o novo sistema :

$$\begin{aligned} 45x+20y&=85,\\ 47x-2y&=43, \end{aligned}$$

ou simplificando a penultima equação

$$\begin{aligned} 9x+4y&=17, \qquad (2)\\ 47x-2y&=43. \end{aligned}$$

Somando estas duas equações, depois de multiplicar por 2 os dois membros da segunda, os termos en y desaparecem ; temos a equação :

$$103x=103,$$

cuja raís é $x=1$.

Para este valor de x, a primeira das equações (2) vem a ser

$$9.1+4y=17,$$

cuja raís é $y=2$.

Para $x=1$ e $y=2$, a primeira equação se reduz a

$$2.1+3.2+z=8,$$

cuja raís é $z=0$.

A solução procurada é :

$$x=1, \quad y=2, \quad z=0.$$

Regra. — *Para se resolver por redução um sistema de 3 equações a 3 incógnitas :*

1.º Dá-se a z o mesmo coeficiente nas 3 equações e somam-se ou subtraem-se essas equações 2 a 2 de modo a fazer desaparecer z ; vem um sistema de 2 equações a 2 incógnitas x e y que se resolve ;

2.º Levam-se os valores de x e y numa das 3 primeiras equações e vem o valor de z.

V. Eliminação pelos coeficientes indeterminados.

101. **Regra.** — Para se resolver um sistema de equações pelos coeficientes indeterminados (metodo de Bezout), é preciso :

1.º Multiplicar todas as equações menos uma por coeficientes indeterminados (m, n, o, p, etc.), *somar as equações obtidas,*

pôr as incognitas em factor e anular os coeficientes de todas as incógnitas execto uma. Deste modo, obtem-se um novo sistema com uma incógnita e uma equação a menos do que no proposto.

2.º Do mesmo modo, faz-se desaparecer uma incógnita e uma equação no novo sistema ; continúa-se da mesma maneira e vem, afinal, uma unica equação de uma só incógnita, e resolve-se esta equação (n.º 87).

Aplicação. — *Resolver o sistema :*

$$\begin{aligned} 5x+2y&=29, \qquad (1)\\ 2x-3y&=4. \qquad (2) \end{aligned}$$

Multipliquemos a 1ª equação pelo coeficiente indeterminado m, vem :

$$5mx+2my=29m. \qquad (3)$$

Somemos agora as equações (2) e (3), temos :

$$2x+5mx-3y+2my=4+29m,$$

ou, pondo x e y em evidência :

$$x(2+5m)+y(2m-3)=4+29m. \qquad (4)$$

Na equação (4), anulemos o coeficiente de y, temos a condição $2m-3=0$, ou $2m=3$, e, afinal : $m=3/2$.

A equação (4), então, vem a ser :

$$x(2+5m)=4+29m,$$

que dá logo :

$$x=\frac{4+29m}{2+5m}.$$

Neste valor de x, se substituirmos m por seu valor $3/2$, teremos :

$$x=\frac{4+29\times3/2}{2+5\times3/2}=\frac{8+87}{4+15}=\frac{95}{19}=5.$$

Na equação (1), substituindo x por 5, temos para y :

$$y=\frac{29-5x}{2}=\frac{29-25}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

A solução do sistema dado é :

$$x=5 \quad \text{e} \quad y=2.$$

Regra. — *Para se resolvêr pelo método de Bezout um sistema de 2 equações a 2 incógnitas :*

1.º Multiplica-se a 1.ª equação pelo factor indeterminado m, *soma-se com a segunda equação, põe-se* x *e* y *em evidência e anula-se o coeficiente de* y ; *vem uma equação de condição que dá o valor de* m *e resta outra equação que dá logo o valor de* x.

2.º *Leva-se* x *numa das 2 primeiras equações e obtem-se o valor de* y.

VI. Resolução de alguns sistemas por meio de artificios particulares.

102. **Sistema I.**

$$x+y+z+u=a,$$
$$x+y+z-u=b,$$
$$x+y-z+u=c,$$
$$x-y+z+u=d.$$

É evidente que se, da primeira equação, subtrairmos, membro a membro, cada uma das outras equações, eliminaremos cada vez tres incógnitas.

Obtemos assim sucessivamente :

1º $$(x+y+z+u)-(x+y+z-u)=a-b,$$
ou $$2u=a-b,$$
donde $$u=\frac{a-b}{2}.$$

2º $$(x+y+z+u)-(x+y-z+u)=a-c,$$
$$2z=a-c,$$
$$z=\frac{a-c}{2}.$$

3º $$(x+y+z+u)-(x-y+z+u)=a-d,$$
$$2y=a-d,$$
$$y=\frac{a-d}{2}.$$

4º Levando estes valores de u, y, z, para a primeira equação, ela se torna :

$$x=a-\frac{a-b}{2}-\frac{a-c}{2}-\frac{a-d}{2}=\frac{b+c+d-a}{2}.$$

A solução deste sistema é :

$$x=\frac{b+c+d-a}{2},\quad y=\frac{a-d}{2},\quad z=\frac{a-c}{2},\quad u=\frac{a-b}{2}.$$

103. **Sistema II.**

$$x+y+z+u=a,$$
$$y+z+u+v=b,$$
$$z+u+v+x=c,$$
$$u+v+x+y=d,$$
$$v+x+y+z=f.$$

Somando-se estas cinco equações, obtem-se

$$4x+4y+4z+4u+4v=a+b+c+d+f,$$

ou ainda

$$x+y+z+u+v=\frac{a+b+c+d+f}{4}.$$

Desta equação subtraindo-se sucessivamente cada uma das propostas obtem-se :

1º $$(x+y+z+u+v)-(x+y+z+u)=\frac{a+b+c+d+f}{4}-a,$$

ou ainda

$$v=\frac{b+c+d+f-3a}{4}.$$

2º $$(x+y+z+u+v)-(y+z+u+v)=\frac{a+b+c+d+f}{4}-b,$$

ou ainda

$$x=\frac{a+c+d+f-3b}{4}.$$

3º $$(x+y+z+u+v)-(z+u+v+x)=\frac{a+b+c+d+f}{4}-c,$$

ou ainda

$$y=\frac{a+b+d+f-3c}{4}.$$

4º $$(x+y+z+u+v)-(u+v+x+y)=\frac{a+b+c+d+f}{4}-d,$$

ou ainda

$$z=\frac{a+b+c+f-3d}{4}.$$

5º $$(x+y+z+u+v)-(v+x+y+z)=\frac{a+b+c+d+f}{4}-f,$$

ou ainda

$$u=\frac{a+b+c+d-3f}{4}.$$

104. **Sistema III.**

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a,\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b,\qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c.$$

A adição membro a membro destas equações dá

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=a+b+c \text{ ou } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Desta ultima subtraindo sucessivamente cada uma das propostas, temos :

$$\frac{1}{z}=\frac{a+b+c}{2}-a, \quad \text{donde} \quad z=\frac{2}{b+c-a};$$

$$\frac{1}{y}=\frac{a+b+c}{2}-b, \quad \text{donde} \quad y=\frac{2}{a-b+c};$$

$$\frac{1}{x}=\frac{a+b+c}{2}-c \quad \text{donde} \quad x=\frac{2}{a+b-c};$$

105. **Sistema IV.**

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}; \qquad x+y+z=m.$$

A serie das razões iguais dá (nº 77) :

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{m}{a+b+c}.$$

Daí deduzem-se as equações seguintes :

$$\frac{x}{a}=\frac{m}{a+b+c}; \quad \text{donde} \quad x=\frac{am}{a+b+c};$$

$$\frac{y}{b}=\frac{m}{a+b+c}; \quad \text{donde} \quad y=\frac{bm}{a+b+c};$$

$$\frac{z}{c}=\frac{m}{a+b+c}; \quad \text{donde} \quad z=\frac{cm}{a+b+c}.$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES SIMULTANEAS A RESOLVER

883. $x+y=9$
$x-y=1$

884. $u-v=6$
$u+v=80$

885. $3x+2y=32$
$3x-4y=-10$

886. $2x+y=7$
$5x-3y=1$

887. $6x+7y=79$
$5x-11y=49$

888. $4x+3y=40$
$6x+7y=100$

889. $7z+2u=31$
$5z+3u=30$

890. $93-21v=6z$
$60-10v=6z$

891. $5u-(8z+16)=0$
$3u+(2z-30)=0$

892. $4x-5y=45$
$7x-3y=96$

893. $x+y=22$
$x-2y=1$

894. $4y-6z+10=0$
$8y+18z-70=0$

895. $9x+3y=48$
$9x-5y=16$

896. $15x-8y=185$
$7x-8y=65$

897. $\frac{x}{2}=2$
$2x-y=12$

898. $\frac{1}{x-y}=12$
$\frac{y}{x}=\frac{8}{9}$

899. $5x-\frac{2}{3}y=434$
$7x+3y=997$

900. $\frac{7x}{3}-2y=29$
$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=4,75$

901. $\frac{y}{2}-\frac{x}{5}-2=0$
$\frac{3y}{4}-\frac{2x}{5}-2=0$

902. $\frac{3y}{4}-\frac{2x}{5}-1=0$
$2x+3y-22=0$

903. $3y+5x=126245$
$\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$

904. $x-y=1$
$\frac{2x}{5}+\frac{3y}{4}=5$

905. $x-y=1$
$\frac{3x}{4}-y=2$

906. $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$
$5x-4y=-3$

907. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{4}{3}$
$\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$

908. $\frac{x+y}{4}+\frac{x-y}{2}=3$
$12x-7y=33$

909. $\frac{x+y}{5}=\frac{x-y}{3}$
$\frac{x}{2}=y+2$

910. $\frac{x+1}{y}=\frac{1}{4}$
$\frac{x}{y+1}=\frac{1}{5}$

911. $2x+\frac{y-2}{5}=21$
$4y+\frac{x-4}{6}=29$

912. $x-y=2$
$\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$

913. $\frac{x}{y}=\frac{1}{4}$
$y=5x-2$

914. $10z-5v-100=0$
$\frac{z}{v}=5,5$

915. $\frac{3x}{4}-\frac{4u}{5}-14=0$
$\frac{x}{10}+\frac{5u}{4}-29=0$

916. $\frac{v}{5}+1=\frac{t}{4}+2$
$\frac{3t+16}{5}=\frac{2v-6}{3}$

917. $\frac{3x}{10}-9=\frac{y}{3}$
$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=13$

918. $\frac{z+u}{4}+\frac{z-u}{2}=3$
$\frac{z+u}{4}-\frac{z-u}{2}=1$

919. $\frac{z+1}{v}=\frac{1}{4}$
$\frac{z}{v+1}=\frac{1}{5}$

920. $x+\frac{y-2}{10}=\frac{134}{5}$
$y-\frac{x-4}{24}=\frac{153}{8}$

921. $x+\frac{y}{6}=\frac{55}{18}$
$\frac{x}{y}=9$

922. $3(x+y)-4(x-y)=120$
$3(x+y)+4(x-y)=120$

923. $\frac{2x+3y}{3}-\frac{2x-3y}{2}=\frac{5}{3}$
$\frac{4x-3y}{4}-2(3y-x)=\frac{3}{4}$

924. $4\left(\frac{x+2}{7}\right)+(y-x)-(2x-8)4=\frac{38}{7}$
$\frac{2y-3x}{6}+y-\frac{3x+4}{2}=-2$

925. $\frac{1}{3(x+2y+3)}+\frac{1}{13(4x-5y+6)}=0$
$\frac{1}{19(6x-5y+4)}-\frac{1}{9(3x+2y+1)}=0$

926. $x-y=1$
$x^2-y^2=21$

EQUAÇÕES LITERAES

927. $x+y=2a$
$x-y=2b$

928. $x+2y=a$
$x-3y=b$

929. $x+y=a$
$\frac{1}{c}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$

930. $x+2y=a$
$y=bx$

931. $\frac{x}{a}-y=1$
$\frac{y}{b}-x=1$

932. $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2$
$ax=by$

933. $x+y=a$
$bx-cy=a(b-c)$

934. $x+y=a+b$
$ax+by=2ab$

935. $ax=2by$
$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=3$

936. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2a$
$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2b$

937. $ax+by=2(a+b)$
$ax-by=2(a-b)$

938. $\frac{2x}{a}+\frac{y}{a}=1$
$\frac{x}{b}=y$

939. $\frac{b}{a}=\frac{1}{y-m}$
$\frac{ay}{d}=1+\frac{x}{d}$

940. $ax+by=a^2+b^2$
$bx=ay$

941. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$

942. $ax+by=a$
$bx+ay=b$

943. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2a^2+2b^2$
$\frac{x}{b}=\frac{y}{a}$

944. $x(a+c)-by=bc$
$x+y=a+b$

945. $\frac{x}{c}+\frac{y}{c}=1$
$\frac{ax}{c}-\frac{by}{c}=a-b$

946. $\frac{x-a}{b}=\frac{b-y}{a}$
$\frac{x+y}{a}+\frac{x-y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$

947. $\frac{1}{b^2x}+\frac{1}{a^2y}-\frac{1}{ab}=0$
$\frac{1}{a^2x}+\frac{1}{b^2y}-\frac{1}{ab}=0$

948. $\frac{x}{b}-\frac{y}{a+1}-\frac{1}{a+1}=0$
$x-a=b-y$

949. $\frac{(a-b)x}{a+b}+y-1=0$
$x-\left(\frac{a+b}{a-b}\right)y-1=0$

950. $\frac{x+y}{b}+\frac{x-y}{a}=\frac{1}{ab}$
$\frac{x-y}{b}+\frac{x+y}{a}=0$

EQUAÇÕES DE MAIS DE DUAS INCOGNITAS

951. $x+y=z+14$
$x-y=6-z$
$y-x=-(4+z)$

952. $x+y=z$
$2x+z=y+9$
$5x-2y=z-6$

953. $x+y+z=11$
$2x-y+z=5$
$3x+2y+z=24$

954. $x-y+z=7$
$x+y-z=1$
$y+z-x=3$

955. $x+y=16$
$x+z=22$
$y+z=28$

956. $x+y=5$
$y+z=8$
$z+u=9$
$u+v=11$
$x+v=9$

957. $x+y+z=a$
$x+y+v=b$
$x+z+v=c$
$y+z+v=d$

958. $\frac{x+y-1}{x+y+1}=a$
$\frac{y-x+1}{x-y+1}=ab$

959. $x-y+6=0$
$x-y+12=0$
$x+y+z=33$

960. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$
$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20}$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}$

961. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$
$x+y+z=(a+b+c)^2$

962. $\frac{x}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z}{7}=\frac{v}{8}$
$x+y+z+v=23400$

963. $\frac{x}{2}=y=\frac{z}{5}$
$3x+5y+z=34$

964. $mx=ny=pz$
$ax+by+cz=d$

965. $ax=by=cz$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{d}$

CAPITULO IV

PROBLEMAS A VARIAS INCOGNITAS

I. Resolução de alguns problemas.

106. **Problema I.** — *Repartir o número 1000 em duas partes tais que os 5/6 da primeira, diminuidos do 1/4 da segunda, façam* 10.

Sejam x e y as duas partes.

As condições do problema dão as duas equações :

$$x+y=1000, \qquad \frac{5x}{6}-\frac{y}{4}=10.$$

Expelindo os denominadores da segunda, vem :

$$10x-3y=120.$$

Somando esta com 3 vezes a primeira, teremos :

$$10x-3y+3(x+y)=120+3\times1000;$$

donde :

$$x=240.$$

Obteremos y levando este valor de x para a primeira equação, que vem a ser :

$$240+y=1000,$$

ou

$$y=760.$$

Resp. : *As duas partes são 240 e 760.*

107. **Problema II.** — *Pedro e Paulo têm certo número de laranjas. Se Paulo désse 12 laranjas a Pedro, cada um teria o mesmo número; pelo contrario, se Pedro désse os 3/5 das suas a Paulo, o número de laranjas de Paulo seria aumentado de seus 3/8. Quantas laranjas possúe cada um?*

Sejam x e y os números respetivos de laranjas de Pedro e Paulo.

Se Pedro receber 12 laranjas de Paulo, os dois haveres serão iguais : donde resulta a equação :

$$y-12=x+12 \quad \text{ou} \quad y-x=24. \qquad (1)$$

Se Pedro der os 3/5 de suas laranjas a Paulo, o haver y deste ultimo aumentará de seus 3/8 ; temos pois para a segunda equação do problema :

$$y+\frac{3x}{5}=y+\frac{3y}{8},$$

ou reduzindo :

$$8x=5y. \qquad (2)$$

Esta equação dá $x=\frac{5y}{8}$. Para este valor de x a equação (1) vem a ser :

$$y-\frac{5y}{8}=24, \quad \text{donde} \quad y=64.$$

Para obtermos x, levemos este valor de y na equação (2), teremos :

$$x=40.$$

Resposta : *Pedro tem 40 laranjas e Paulo 64.*

108. **Problema III.** — *Um número tem 3 algarismos. O algarismo das centenas é a soma dos dois outros, e cinco vezes o das unidades faz a soma do das dezenas e do das centenas. Calcular este número, sabendo que invertendo-se a ordem dos algarismo, o número diminue de 594.*

Sejam x, y, z, os algarismos respetivos das centenas, das dezenas e das unidades do número desconhecido.

A primeira e a segunda condição do problema fornecem as duas equações :

$$x=y+z, \qquad 5z=x+y.$$

No sistema decimal, o numero procurado e este mesmo numero, de algarismos invertidos, exprimem-se respetivamente por

$$100x+10y+z \quad \text{e} \quad 100z+10y+x.$$

Portanto, sua diferença fornece a equação :

$$100x+10y+z-(100z+10y+x)=594,$$

que se reduz a :

$$x-z=6.$$

Reunindo as equações precedentes, temos o sistema :

$$\begin{aligned} x&=y+z, &(1)\\ x&=5z-y, &(2)\\ x&=z+6. &(3)\end{aligned}$$

Comparando primeiro (1) e (3), e depois (1) e (2), temos primeiro :

$$y+z=z+6, \quad \text{donde} \quad y=6;$$

e em segundo lugar :

$$y+z=5z-y, \quad \text{donde} \quad z=3;$$

A equação (1) dá :

$$x=6+3=9.$$

Resp. : *O número procurado é 963.*

109. **Problema IV.** — *Uma liga de cobre e de estanho pesa 100 kg no ar e 87 kg, 5 na agua. Quantos kg de cobre e de estanho contem, se as densidades destes metais são respetivamente 8,8 e 7,2?*

Sejam x e y os pesos do cobre e do estanho. Temos para a primeira equação.

$$x+y=100. \qquad (1)$$

Mergulhados na agua, 1 dm³ de cobre e 1 dm³ de estanho, perdem 1 Kg cada um, em virtude do principio de Arquimedes.

Posto isto, para se achar a segunda equação, raciocina-se como segue : sobre 8 Kg 8 de cobre pesados na agua perde-se 1 Kg; sobre um só Kg de cobre perder-se-á $\frac{1}{8,8}$, e sobre os x Kg de cobre da liga perder-se-á $\frac{x}{8,8}$.

Do mesmo modo acha-se que os y Kg de estanho perdem na agua $\frac{y}{7,20}$.

Ora, a perda feita sobre os dois metais é 100—87,5=12 Kg,5. Temos, pois, a equação :

$$\frac{x}{8,8}+\frac{y}{7,2}=12,5. \qquad (2)$$

Resolvendo o sistema das equações (1) e (2), *achamos* 55 kg *de cobre e* 45 kg *de estanho.*

110. **Problema V.** — *Divide-se um capital em 3 partes que se emprestam a juros simples durante 3 anos, ás taxas respetivas de 3, 4 e 5 % por ano. Estas partes são tais que os juros da primeira e da segunda valem juntos 2:790$; os juros da 1.ª parte e da 3.ª valem juntos 3:300$; emfim a soma dos juros das duas ultimas partes é 3:390$. Pede-se cada parte e o capital total.*

As tres partes sendo x, y z e o capital $x+y+z$, os juros das 3 partes por 3 anos serão respetivamente :

$$\frac{3.3.x}{100}, \quad \frac{4.3.y}{100}, \quad \frac{5.3.z}{100}.$$

Temos, pois, as tres equações :

$$\frac{9x}{100}+\frac{12y}{100}=2:790,$$

$$\frac{9x}{100}+\frac{15z}{100}=3:300,$$

$$\frac{12y}{100}+\frac{15z}{100}=3:390,$$

que se reduzem ás tres seguintes :

$$3x+4y=93000, \qquad (1)$$

$$3x+5z=110000, \qquad (2)$$

$$4y+5z=113000. \qquad (3)$$

Somando a equação (3) com a diferença das equações (1) e (2), achamos :

$$(3x+4y)-(3x+5z)+(4y+5z)=93\ 000-110\ 000+113000.$$

ou

$$y=12\ 000.$$

As equações (1) e (3) dão em seguida :

$$x=15\ 000 \quad \text{e} \quad z=13\ 000.$$

Resp. : *As tres partes são* 15:000$, 12:000$ *e* 13:000 $ *e o capital,* 40:000$.

PROBLEMAS A VARIAS INCOGNITAS

966. Repartir 132 em duas partes tais que os 5/7 de uma e os 3/5 de outra façam 88.

967. O quociente de dois números é 5 e a diferença 108. Quais são esses numeros.

968. Achar dois números de modo que um seja 1/9 do outro, e a soma iguale seu produto.

969. A soma de dois números é 65, e a diferença, dividida pelo menor, dá o quociente 8 e o resto 5. Quais são estes dois numeros ?

970. Achar dois números cuja soma seja 169 e o quociente 12.

971. Minha idade e a de meu irmão estão entre si como 7 está para 5 ; daqui a 9 anos, estarão entre si como 5 está para 4. Achar nossas idades.

972. Qual é a fração que iguala 1/5 ou 1/6 conforme se acrescenta 1 ao numerador ou ao denominador ?

973. Qual é a fração que iguala 2/3 acrescentando-se 1 a cada termo, e vem a ser 1/2 subtraindo-se 1 de cada termo ?

974. Achar dois números tais que sua soma, sua diferença e seu produto sejam proporcionais a 5, 3 e 8.

975. A idade de um joven é um número tal que a soma dos dois algarismos é 7. Qual é este número, sabendo que, invertendo a ordem dos algarismos, o numero obtido vale 2 vezes o 1.º, mais 2 ?

976. Paulo diz a Emilio : « Dá-me 40$ e terei 28 vezes tanto quanto tiveres depois. — Dá-me 95$ diz Emilio, e terei tanto quanto tiveres. » Quanto tem cada um ?

977. A soma dos dois algarismos de um número é 15. Invertendo-se a ordem dos algarismos, obtem-se outro número que é apenas os 23/32 do primeiro. Qual é o primeiro número ?

978. Acrescentando-se o primeiro de dois números á metade do segundo, ou ainda acrescentando-se o segundo ao terço do primeiro, obtem-se 16 nos dois casos. Quais são esses números ?

979. Por 12 dias de trabalho, durante 7 dos quais teve o filho comsigo, um operario recebeu 74$. Trabalhou depois 8 outros dias durante 5 dos quais fez-se ajudar ainda pelo filho, e recebeu 50$. Quanto ganhou cada um por dia ?

980. A disse a B : « Tenho 4 vezes a idade que o Snr. tinha quando eu tinha sua idade, e quanda o Snr. tiver tantos anos como tenho, terei ainda 9 anos mais do que o Snr. » Quais são as duas idades ?

981. « Vendendo meu café por 17$ a arroba, dizia um fazendeiro, posso comprar uma casa e ter 500$ de sobra ; mas vendendo-o por 12$, ficaria obrigado a pedir emprestado 4:000$. Determinar o número de arrobas e o preço da casa. »

982. Um general quer recompensar alguns soldados, e lhes destina certo numero de notas de 5$. Se cada soldado tomar 8 notas, sobrarão 45 notas ; e se cada um tomar 11, faltarão 27. Quantos soldados se devem recompensar e quantas notas se devem distribuir ?

983. Trabalhando juntos, dois operarios ganharam 760$, que foram repartidos de modo tal, que se o 1.º tivesse recebido 40$ menos e o 2.º 80$ mais, a parte do ultimo teria sido os 3/5 da do 1.º. Achar as duas partes.

984. Dois vasos de prata valem juntos 100$; o primeiro vaso com sua tampa, vale 60$; o segundo vaso, com a tampa do 1.º, vale 66 $. Quanto valem os dois vasos e a tampa do 1.º ?

985. Um pai promete ao filho $250 todos os dias em que estudar bem, com a condição que o filho pague $400 nos dias de preguiça. Depois de 40 dias, o filho recebe 3$500. Durante quantos dias foi diligente ?

986. Comprei 2 m. de algodão e 6 m. de casimira. Comprando 6 m. de algodão e 2 m. de casimira, pagaria 40$ menos. Qual é o preço do metro de cada fazenda, se o que paguei ao todo em $ iguala o quadrado da diferença dos dois preços em $ tambem ?

987. Num hotel, tres viajantes gastaram certa quantia ; o 1.º e o 2.º juntos gastaram 2$ mais do que o 3.º ; o 1.º e o 3.º juntos gastaram 6$ mais do que o 2.º ; emfim o 2.º e o 3.º juntos gastaram 10$ mais do que o 1.º. Quanto gastou cada um ?

988. Repartir 180 em tres partes tais que a metade da 1.ª, o 1/3 da 2.ª, o 1/4 da 3.ª, sejam tres números iguais.

989. Num número de 3 algarismos, o algarismo das centenas e o das unidades têm 10 por soma ; o das dezenas e o das unidades têm 12 por soma ; emfim o das centenas e o das dezenas têm 6 por soma. Achar este número.

990. Tres barras de ouro têm os toques respetivos de 0,950, 0,980, 0,720. Forma-se uma quarta liga de 8kg,500 do toque de 0,900, na qual se empregam pesos iguais das duas ultimas barras ; quantos kg. se tomam de cada barra ?

991. Uma corôa pesa 300 gr. e é formada de ouro e de prata. Pesada na agua, perde 20 gr. de seu peso. Achar a composição desta corôa, se a densidade do ouro é 19,50 e a da prata 10,50.

992. Tres operários cavam um fosso ; o 1.º e o 2.º o cavariam em 1 dia 5/7 ; o 2.º e o 3.º, o cavariam em 2 dias 2/9, e o 1.º e o 3.º, em 1 dia 7/8. Quanto tempo levaria cada operário, trabalhando só ?

993. Um ourives tem duas barras formadas de ouro e de prata. A 1ª tem por toque 0,95 e a 2ª 0,85. Que peso de cada barra se deve tomar para se obter uma liga do toque de 0,90 ?

994. Um negociante de vinhos vendeu 30 lit. de vinho de Borgonha, 6 lit. de Bordéos et 5 lit. de Champagne por 65$; segunda vez vendeu 5 lit. de Borgonha, 10 de Bordéos e 12 de Champagne por 69$; 3ª vez vendeu 20 lit. de Borgonha, 4 de Bordéos e 10 de Champagne por 70$. Qual é o preço do litro de cada qualidade ?

CAPITULO V

IMPOSSIBILIDADE, INDETERMINAÇÃO E DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS

---

111. Ha tres cousas a considerar no resolução de um problema de algebra :

1º *pôr o problema em equações*, como vimos no nº 88 e seguintes ;

2º *resolver as equações*, como vimos na nº 98 e seguintes ;

3º *discutir os valores* dados pelas equações.

Os valores dados pelas equações pódem ser : *impossiveis, indeterminados, determinados e aceitaveis.*

I. Casos de impossibilidade.

112. Um problema do primeiro gráu é geralmente impossivel nas quatro circumstancias seguintes :

1º *Quando o enunciado exige uma solução positiva e a equação do problema conduz a uma solução negativa* ;

2º *Quando a solução é um numero fracionário de pessôas ou de cousas indivisiveis* ;

3º *Quando a solução é da forma* $\frac{a}{0}$;

4º *Quando o problema dá mais equações do que incógnitas.*

113. **Primeiro caso.** — Em geral, um problema cuja equação fornece uma solução negativa *é impossivel*. Entretanto, em muitos casos, a regra seguinte permite *interpretar* a solução negativa achada.

Regra. — *Se a incógnita do problema fôr suscetivel de se tomar em dois sentidos opostos, o valor absoluto da solução negativa achada é a verdadeira solução, e o sinal —, que a acompanha, mostra que é presiso toma-la no sentido contrario do que indica o enunciado do problema.*

Exemplo. — *Un pai tem 51 anos e o filho 15; daqui a quantos anos a idade do pai será 10 vezes a idade do filho?*

Designando-se por x o número de anos que devem decorrer desde agora até a época procurada, a idade do pai será então $51+x$, e a do filho $15+x$.

Teremos para a equação do problema

$$10\times(15+x)=51+x\ ;$$

donde

$$x=-11.$$

Este resultado mostra que o problema assim exposto é impossivel. Devemos modificar-lhe o enunciado como segue: « *Um pai tem 51 anos e o filho 15; ha quantos anos que a idade do pai era 10 vezes a idade do filho?* » Designando-se por x o tempo decorrido desde a época em que a idade do pai era 10 vezes a idade do filho, temos para a equação do problema.

$$10\times(15-x)=51-x\ ;$$

cuja rais é

$$x=11.$$

Ha portanto 11 anos que se realizou a condição do problema. *A reposta* -11, *achada antes, indica uma época passada e deve interpretar-se neste sentido.*

114. **Observação.** — Nos problemas de algebra, as principaes quantidades suscetiveis de receber duas significações opostas são: *o tempo, as distâncias, as temperaturas, os lucros e as perdas, as velocidades*, etc.

115. **Segundo caso.** — Em geral, um problema é impossivel quando a solução é um *número fracionário* de pessôas ou de cousas que não pódem existir senão inteiras.

Exemplo. — *Num tiro ao alvo, um jogador deu 20 tiros; pagou $450 por tiro errado e recebeu 1$ por tiro certo. Quantas vezes acertou o alvo, se deve $500 ao mestre de tiro?*

Seja x o numero de tiros felizes; $20-x$ será o dos tiros errados. O jogador ganhou $x$$ e perdeu $0{,}45\times(20-x)$$.

Donde a equação

$$0{,}45\times(20-x)-x=0{,}50;$$
$$x=5{,}86.$$

Como o número dos tiros felizes é fracionário, o problema é impossivel.

116. **Terceiro caso.** — Um problema é absolutamente impossivel ou *absurdo* quando a solução é da forma $\frac{a}{0}$.

Um numero é *infinito* quando é maior do que qualquer quantidade dada, *por maior que ela seja.*

Os quocientes

$$\frac{4}{0{,}01},\quad \frac{4}{0{,}000\,1},\quad \frac{4}{0{,}000\,001},\quad \frac{4}{0{,}000\,000\,01},\quad \text{etc.}$$

ou

$$400,\quad 40\,000,\quad 4\,000\,000,\quad 400\,000\,000, \text{etc.}$$

vão aumentando; concebe-se pois que, numa divisão, *se o divisor vier a ser cada vez menor, o quociente será cada vez maior; portanto, se o divisor vier a ser nulo, o quociente será infinito.*

Representando o infinito pelo simbolo ∞, e um número qualquer pela letra a, temos:

$$\frac{a}{0}=\infty.$$

Exemplo. — *Achar um número cuja metade, aumentada dos 3/7 deste número e de 40, faça os 13/14 do mesmo número aumentados de 60.*

Representemos este número por x, temos a equação

$$\frac{x}{2}+\frac{3x}{7}+40=\frac{13x}{14}+60,$$

que se reduz ao absurdo

$$40=60.$$

Se não efetuarmos a redução completa dos termos semelhantes, da equação, acharemos sucessivamente:

$$\frac{x}{2}+\frac{3x}{7}-\frac{13x}{14}=60-40,$$

$$\frac{13x}{14}-\frac{13x}{14}=20,$$

$$x\left(\frac{13}{14}-\frac{13}{14}\right)=20,$$

$$x=\frac{20}{\frac{13}{14}-\frac{13}{14}}=\frac{20}{0}=\infty.$$

O problema proposto tem como solução um valor infinito, e é absurdo. Além disso, observa-se que a metade e os 3/7 de x fazem $\frac{13x}{14}$. O problema poderá enunciar-se assim : « *Achar um numero cujos 13/14 aumentados de 40 sejam iguais aos 13/14 deste mesmo número aumentados de 60.* » Assim proposto o problema é visivelmente absurdo.

Em resumo, *a resolução de um problema consiste em achar os valores finitos ou apreciaveis de suas incógnitas ; se uma delas tem um valor infinito, ela escapa á apreciação, não é mais algébrica e o problema é impossivel.*

117. **Quarto caso.** — Um problema é geralmente impossivel quando sua solução dá mais equações do que incógnitas.

Suponhamos que um problema a duas incógnitas tenha dado as tres equações :

$$x+y=20, \quad 2x-3y=15, \quad 5x+4y=100.$$

Das duas primeiras tira-se

$$x=15 \quad \text{e} \quad y=5.$$

Estes valores de x e de y devem verificar a terceira equação ; isto, porém, não acontece, pois que a substituição dá aqui :

$$5\times15+4\times5=100,$$

ou

$$95=100.$$

II. Caso de indeterminação.

118. **Definição.** — Um problema do primeiro grâu é indeterminado quando admite varias soluções.

Simbolo da indeterminação. — *O simbolo da indeterminação é* $\frac{0}{0}$, *que representa uma infinidade de números.*

Com efeito, seja q o quociente de 0 por 0. Como o dividendo é o produto do divisor pelo quociente, temos

$$\frac{0}{0}=q, \quad \text{donde} \quad 0=0\times q.$$

Mas $0\times q$ é nulo seja qual fôr o valor atribuido a q. Podemos, pois, escrever :

$$\frac{0}{0}=1, \quad \frac{0}{0}=2, \quad \frac{0}{0}=3, \quad \frac{0}{0}=4, \quad \text{etc.}$$

119. **Caráter de indeterminação.** — *Um problema é indeterminado quando sua resolução fornece menos equações do que incógnitas.*

Suponhamos que um problema de tres incógnitas forneça somente as duas equações :

$$x+y-z=30, \qquad x-2y-3z=1.$$

Eliminando-se x entre estas duas equações, vem, para determinar y e z, a unica equação

$$3y+2z=29.$$

Dando-se a z os valores 1, 2, 3, 4, 5, 6,... resultam para y os valores correspondentes, 9, $\frac{25}{3}$, $\frac{23}{3}$, 7,.., e para x, 22, $\frac{71}{3}$, $\frac{76}{3}$, 27, etc.

De sorte que o problema dado tem uma infinidade de soluções que são

1º	$x=22$	$y=9,$	$z=1$
2º	$x=71/3,$	$y=25/3,$	$z=2$
3º	$x=76/3,$	$y=23/3,$	$z=3$
4º	$x=27,$	$y=7,$	$z=4$
	....	....	.....

Nota. — Os problemas indeterminados pódem formar 2 categorias :

1.º Os que admitem tanto soluções inteiras como fraccionarias, positivas ou negativas.

Resolvem-se pelo modo acima exposto.

2.º Os que admitem apenas soluções inteiras.

Resolvem-se pela analise indeterminada (nº 139).

Exemplo. — *Achar dois números tais que o quarto do primeiro e os 3/8 do segundo façam a soma dos dois números diminuida de 27, e tais ainda que 6 vezes o primeiro e 5 vezes o segundo façam 216.*

Os dois números desconhecidos x e y dão as duas equações :

$$\frac{x}{4}+\frac{3y}{8}=x+y-27 \qquad 6x+5y=216.$$

Levando para a primeira o valor de x tirado da segunda, vem :

$$\frac{216-5y}{24}+\frac{3y}{8}=\frac{216-5y}{6}+y-27\,;$$

donde se deduz sucessivamente :

$$4y-4y=864-864,$$

$$y=\frac{864-864}{4-4}=\frac{0}{0}.$$

Convem observar que as duas equações

$$\frac{x}{4}+\frac{3y}{8}=x+y-27,$$

e

$$6x+5y=216,$$

vêm a sêr uma unica equação, se as reduzirmos á forma

$$ax+by=c.$$

A primeira dá tambem, com efeito :

$$6x+5y=216.$$

Disto resulta que não havia senão uma só equação de duas incógnitas para resolver este problema.

III. Discussão dos problemas a uma só incógnita.

120. **Definição.** — Discutir um problema é *estabelecer* as condições que o tornam *possivel, impossivel* ou *indeterminado.* É ainda *interpretar*-lhe as soluções quando os coeficientes recebem *todos os valores possiveis.*

A discussão de um problema faz-se com sua equação, que deve traduzi-lo rigorosamente.

121. **Discussão da equação** $ax=b$. A forma geral da equação do primeiro gráu a uma incógnita é

$$ax=b\,; \qquad (1)$$

sua formula de resolução é

$$x=\frac{b}{a}. \qquad (2)$$

Para discutirmos esta, distinguiremos dois casos, conforme a fôr diferente de 0, ou nulo.

Em cada caso, faremos a hipótese que b é diferente de 0, ou nulo.

Primeiro caso : $a \lessgtr 0$ (1). — 1.º Façamos ao mesmo tempo a hipótese : $b \lessgtr 0$. O valor de x é então finito, determinado e diferente de zero, pois os dois termos da fração b/a, não são nulos nem um nem outro.

2.º Supondo $b=0$, o valor de x seria

$$x=\frac{b}{a}=\frac{0}{a}=0.$$

Segundo caso : $a=0$. — 1.º A hipótese $b \lessgtr 0$ dá um valor infinito a x, pois que na fração

$$x=\frac{b}{a}=\frac{b}{0},$$

o numerador não é nulo e o denominador é 0. De sorte que a equação $ax=b$ é absurda ou impossivel, visto que sua rais é infinita.

2º Se tivermos $b=0$, ao mesmo tempo que $a=0$, o valor de x será :

$$x=\frac{b}{a}=\frac{0}{0}.$$

A equação $ax=b$ é pois indeterminada.

Além disso, para $a=b=0$, a equação a discutir vem a ser

$$0.x=0,$$

e vê-se que é verificada para qualquer valor de x.

122. **Quadro da discussão.** — Esta discussão resume-se no quadro seguinte :

$a \lessgtr 0$ { $b \lessgtr 0$: Uma rais finita, diferente de 0.
$b=0$: Uma rais nula.

$a=0$ { $b \lessgtr 0$: Uma rais infinita, equação absurda.
$b=0$: Uma infinidade de raises, equação indeterminada.

123. **Aplicação.** — *Dois correios* A *e* B *seguem uma mesma direção* XY *e suas velocidades respetivas por hora são* v *e* v'. *Sabendo que num momento dado,* A *está em* M *e* B *em* N, *achar que distância percorrerá o segundo antes de ser alcançado pelo primeiro.*

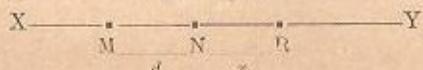
---

(1) O signal $\lessgtr$ lê-se : *diferente de ;* assim $a \lessgtr 0$ enuncia-se : a diferente de 0.

A's vezes emprega-se o signal $\neq$, que se lê do mesmo modo, e significa a mesma cousa.

Seja d a distância MN que separa os dois correios e x a distância NR percorrida pelo segundo antes de ser alcançado pelo primeiro. A distância percorrida pelo correio A será :

$$MR = d + x.$$

X——M——N——R——Y
M — d — N — x — R

O tempo empregado pelo correio A é $\frac{d+x}{v}$, ao passo que B emprega $\frac{x}{v'}$.

Como estes tempos são iguais, a equação do problema é

$$\frac{d+x}{v} = \frac{x}{v'}; \quad \text{donde} \quad x = \frac{dv'}{v-v'}.$$

Para discutirmos esta fórmula, distinguiremos tres casos, conforme $v-v'$ fôr positivo, nulo, ou negativo.

Primeiro caso : $v-v'>0$. — No mesmo tempo que $v-v'>0$, podemos ter $d>0$ ou $d=0$.

1.º $d>0$. — Nesta hipótese, o valor de x é positivo e o encontro se dará á direita do ponto N e numa distância finita.

2.º $d=0$. — Esta hipótese significa que os dois correios estão juntos no momento da saida, e como $x = \frac{dv'}{v-v'} = \frac{0}{v-v'} = 0$, êles não se encontram senão no instante da saida.

Segundo caso : $v-v'=0$. — A condição $v-v'=0$ dá $v=v'$ e prova que os dois correios têm mesma velocidade.

1.º $d>0$. — Esta hipótese dará para x o valor

$$x = \frac{d}{0} = \infty,$$

que indica que o caminho percorrido por B é infinito e o problema é impossivel.

2 $d=0$. — Neste caso, temos $x = \frac{0}{0}$. O problema é indeterminado, isto é, os correios estão sempre juntos. É facil concebê-lo, pois que a distância dêles $d=0$ e as velocidades são iguais.

Terceiro caso : $v-v'<0$. — Esta hipótese mostra que v é menor do que v' e, por conseguinte, a velocidade de A é menor do que a velocidade de B.

1º $d>0$. — Esta condição dá para x o valor negativo

$$\frac{dv'}{v-v'} = -\frac{dv'}{v-v'},$$

o que prova que o encontro se fez á esquerda de M e antes que A estivesse em M e B em N.

2º $d=0$. — Neste caso, $x = \frac{0}{v-v'} = 0$. Os dois correios estando juntos no ponto de saida, não se pódem encontrar senão neste ponto.

QUADRO DA DISCUSSÃO

$v-v'>0$ { $d>0$: O encontro se dará á direita de N.
{ $d=0$: Os correios se encontram na saida.

$v-v'=0$ { $d>0$: Os correios nunca se encontrarão.
{ $d=0$: Estão sempre juntos.

$v-v'<0$ { $d>0$: O encontro se deu á esquerda de M.
{ $d=0$: O encontro não se dá senão na saida.

IV. Discussão dos problemas do primeiro gráu a duas incógnitas.

124. **Fórmulas geraes.** — Resolvendo-se um problema do primeiro gráu a duas incógnitas, acham-se, de ordinario, duas equações cujas formas mais gerais são :

$$ax + by = c, \quad (1) \quad \text{e} \quad a'x + b'y = c'. \quad (2)$$

Os valores de x e de y tirados destas equações, são dados pelas formulas

$$x = \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \quad (3) \qquad y = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}. \quad (4)$$

A constituição destas duas fórmulas conduz ás regras seguintes :

125. **Regra de formação do denominador comum.** — *Para se formar o denominador comum* ab′ —ba′ *dos valores de* x *e de* y, *faz-se de uma parte o produto do coeficiente de* x *na primeira equação pelo coeficiente de* y *na segunda, e, de outra*

parte, faz-se o produto do coeficiente de x *na segunda pelo coeficiente de* y *na primeira; depois subtrai-se o segundo produto do primeiro.*

Regra para se formar o numerador de x. — *No denominador comum* ab'—ba', *substituem-se os coeficientes* a *e* a' *de* x, *respetivamente pelos termos conhecidos* c *e* c', *e obtem-se* cb'—bc' *para o numerador de* x.

Regra para se formar o numerador de y. — *No denominador comum* ab'—ba', *substituem-se os coeficientes* b *e* b' *de* y *pelos termos conhecidos* c *e* c', *e obtem-se* ac'—ca' *para o numerador de* y.

Por meio destas regras, chamadas de Cramer, póde-se resolver qualquer problema do primeiro gráu a duas incógnitas.

126. **Aplicações.** — 1.º *Seja resolver o sistema:*

$$7x+2y=110,$$
$$10x-3y=40.$$

Aplicando a regra (125), o denominador comum dos valores de x e de y será

$$7\times(-3)-10\times2=-41.$$

Para obter o numerador x, é preciso, na expressão

$$7\times(-3)-10\times2,$$

substituir os coeficientes 7 e 10 de x respetivamente por 110 e 40. Obtem-se, para o numerador de x, a expressão

$$110\times(-3)-40\times2=-410.$$

O numerador de y se obtem substituindo, no denominador comum $7\times(-3)-10\times2$, os coeficientes 2 e —3 de y por 110 e 40, e vem

$$7\times40-10\times110=-820.$$

Póde-se pois escrever

$$x=\frac{-410}{-41}=10, \qquad y=\frac{-820}{-41}=20.$$

127. — 2º *Um negociante quer pagar 92$ com 31 notas, umas de 5$ e outras de 2$. Qual será o numero das notas de cada especie?*

Se x e y são estes dois numeros de notas, temos as duas equações:

$$x+y=31 \quad \text{e} \quad 5x+2y=92.$$

Conforme a regra (125), o denominador comum será

$$1\times2-5\times1=-3.$$

A regra (125) dá para o numerador de x

$$31\times2-92\times1=-30.$$

Emfim (125), para o numerador de y, teremos,

$$1\times92-5\times31=-63.$$

Portanto

$$x=\frac{-30}{-3}=10 \qquad y=\frac{-63}{-3}=21.$$

Assim, haverá 10 notas de 5$ e 21 notas de 2$.

128. **Discussão das fórmulas** (3) e (4). — Quando o denominador $ab'-ba'$ é diferente de 0, as equações (3) e (4) fornecem para x e y valores determinados, positivos, negativos, ou nulos; estes valores são as unicas raises do sistema (1) e (2).

Quando o denominador $ab'-ba'$ fôr nulo, distinguiremos dois casos: 1.º o numerador de x, $cb'-bc'$ não é nulo; 2.º o mesmo numerador $cb'-bc'$ é nulo.

Primeiro caso. $ab'-ba'=0$, e $cb'-bc'\neq0$.

O valor de x é infinito, pois toma a forma $\frac{m}{0}$, m não nulo.

129. **Teorema.** — *No sistema de 2 equações do 1.º gráu, se o valor de* x *fôr infinito, o valor de* y *o será tambem.*

Com efeito, de

$$ab'-ba'=0 \quad \text{e} \quad cb'-bc'\neq0.$$

vem

$$ab'=ba' \quad \text{e} \quad cb'\neq bc';$$

e depois

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \qquad \frac{c}{c'}\neq\frac{b}{b'};$$

donde :

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'} \quad \text{ou} \quad ac' \neq a'c.$$

ou ainda

$$ac' - a'c \neq 0.$$

Logo, os valores de x e de y tomam ambos a forma $\frac{m}{0}$ e são infinitos. Não ha nenhum valor finito de x e de y que satisfaça o s stema.

130. **Teorema**. — *No sistema de 2 equações do 1.º gráu, se* x *e* y *fôrem infinitos, as equações são incompativeis.*

Com efeito, façamos.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k.$$

Como

$$\frac{c}{c'} \neq \frac{b}{b'}$$

podemos fazer

$$\frac{c}{c'} = l.$$

l sendo diferente de k.

Donde se deduz :

$$a = a'k, \qquad b = b'k, \qquad c = c'l.$$

Substituindo estes valores na equação (1) vem :

$$a'kx + b'ky = c'l.$$

ou

$$a'x + b'y = c'\frac{l}{k}.$$

O sistema proposto se reduz a

$$a'x + b'y = c'\frac{l}{k},$$

$$a'x + b'y = c'.$$

cousa impossivel, absurda, pois que uma mesma quantidade, $a'x + b'y$ não póde ter dois valores diferentes $c'\frac{l}{k}$ e c'.

Segundo caso. $ab' - ba' = 0$ e $cb' - b'c = 0$.

O valor de x toma a fórma indeterminada $\frac{0}{0}$.

131. **Teorema**. — *No sistema de 2 equações do 1.º gráu, se* x *fôr indeterminado,* y *o será tambem.*

Com efeito, de

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{e} \quad cb' - bc' = 0,$$

deduz-se

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \qquad \text{e} \qquad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'};$$

donde vem :

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'},$$

e ainda

$$ac' = a'c \quad \text{ou} \quad ac' - a'c = 0.$$

Logo os valores de x e de y têm ambos a forma $\frac{0}{0}$ e o sistema é indeterminado.

132. **Teorema**. — *No sistema de 2 equações do 1.º gráu, se* x *e* y *fôrem indeterminados, as 2 equações são identicas.*

Com efeito, pois que temos :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'},$$

podemos escrever :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k;$$

donde vem :

$$a = a'k, \qquad b = b'k, \qquad c = c'k.$$

Substituindo estes valores na equação (1) vem :

$$a'kx + b'ky = c'k.$$

e dividindo por k :

$$a'x + b'y = c'.$$

equação identica á segunda.

Por conseguinte a equação (1) não é senão a equação (2) cujos coeficientes são todos multiplicados por uma constante k.

RESUMO DA DISCUSSÃO

$ab' - ba' \neq 0$ { x e y têm valores determinados positivos, negativos, ou nulos.

$ab' - ba' = 0$ { $cb' - bc' \neq 0$. x é infinito ; y o é tambem e as equações são incompativeis. $cb' - bc' = 0$. x é indeterminado; y o é tambem e as duas equações são identicas.

CAPITULO VI

DESIGUALDADES

133. **Definições.** — A diferença $a-b$ de dois números a e b é positiva ou negativa, conforme a fôr maior ou menor que b. Reciprocamente, diz-se que a é maior ou menor que b, conforme a diferença $a-b$ fôr positiva ou negativa.

134. **Consequencias desta definição.** — 1.º *Todo número positivo é maior que zero.*

Seja o número positivo 100, temos $100>0$, porque a diferença $100-0$ é positiva.

2.º *Todo número negativo é menor que zero.*

Seja o número negativo -1000, temos $-1000<0$, porque a diferença $-1000-0$ ou -1000 é negativa.

3º *De dois números negativos o maior é o que tem o menor valor absoluto.*

Sejam os dois números negativos -10 e -1000; temos $-10>-100$, porque a diferença $-10-(-100)=90$ é positiva.

Observação. — Em geral, toma-se a propriedade precedente como definição do número negativo, e diz-se: um número é negativo quando é menor que zero.

135. **Sentido de uma desigualdade.** — O sentido de uma desigualdade é o signal $>$ ou o signal $<$ que esta desigualdade encerra.

136. **Teorema.** — 1.º *Uma desigualdade não muda de sentido acrescentando-se ou subtraindo-se a seus dois membros uma mesma quantidade.*

2.º *Uma desigualdade não muda de sentido multiplicando-lhe os dois membros por uma quantidade positiva. Muda de sentido, se o multiplicador fôr negativo.*

Seja a desigualdade $a>b$; designando por c o que falta a b para igualar a, temos a igualdade:

$$a=b+c. \qquad (1)$$

1º Podemos acrescentar uma quantidade arbitraria m aos dois membros sem que a igualdade cesse, e temos:

$$a+m=b+m+c.$$

Suprimindo c, temos, com evidencia:

$$a+m>b+m.$$

2º Multipliquemos pelo número positivo n os dois membros da igualdade (1); teremos ainda uma igualdade:

$$an=bn+cn.$$

Suprimindo o número positivo cn, o segundo membro diminue, e temos:

$$an>bn.$$

3º Se multiplicassemos os dois membros de (1) pelo número negativo $-p$, teriamos:

$$-pa=-pb-pc.$$

Suprimindo o número negativo $-pc$, o segundo membro desta igualdade aumenta e portanto temos:

$$-pa<-pb,$$

Aplicações. — 1.º *Que vem a ser a desigualdade $3>-25$, multiplicando-lhe os dois membros por 4 ou por -4?*

No primeiro caso, a desigualdade vem a ser

$$3\times4>-25\times4, \quad \text{ou} \quad 12>-100.$$

No segundo caso, vem a ser

$$3\times(-4)<(-25)(-4), \text{ ou } -12<100.$$

2º *Resolver a desigualdade*

$$\frac{8+x}{3}<\frac{5x-10}{5}.$$

Resolver esta desigualdade é achar os valores de x que tornam o primeiro membro menor do que o segundo.

Multipliquemos, primeiro, os dois membros por 3×5, teremos (136, —2º)

$$40+5x<15x-30.$$

Esta desigualdade não mudará de sentido acrescentando aos dois membros $-40-15x$; donde vem:

$$40+5x-40-15x<15x-30-40-15x,$$

ou

$$-10x<-70.$$

Multiplicando os dois membros desta por -1, ela mudará de sentido; teremos (136,—2º):

$$10x>70\ ;$$

donde

$$x>7.$$

Logo, todo o valor de x superior a 7 satisfaz á desigualdade proposta.

Regra. — *Para se resolver uma desigualdade do 1.º gráu a uma incognita, é preciso :*

1.º Expelir os denominadores e parênteses, se houver ;

2.º Transpôr os termos desconhecidos para o 1.º membro e os conhecidos para o 2.º ;

3.º Reduzir os termos conhecidos e pôr a incógnita em factor comum ;

4.º Dividir os 2 membros pelo coeficiente da incógnita.

Nestas operações, examina-se bem o sinal dos multiplicadores ou divisores em cada multiplicação ou divisão.

137. **Teorema.** — 1.º *Somando-se membro a membro varias desigualdades de mesmo sentido, o resultado é uma desigualdade de mesmo sentido.*

2.º *Tirando-se membro a membro uma desigualdade de outra de sentido contrário, o resultado é uma desigualdade de mesmo sentido que o minuendo.*

1º Sejam as desigualdades :

$$a > b,\ a' > b',\ a'' > b''.$$

Façamos :

$$a = b + c,$$
$$a' = b' + c',$$
$$a'' = b'' + c''.$$

Dai resulta que :

$$a + a' + a'' = b + b' + b'' + (c + c' + c'').$$

Suprimindo $c + c' + c''$, o segundo membro diminue de valor e temos :

$$a + a' + a'' > b + b' + b''.$$

2º Sejam as duas desigualdades :

$$a > b \quad \text{e} \quad c < d.$$

Teremos :

$$a - c > b - d.$$

Com efeito, a segunda desigualdade póde escrever-se $d > c$; e acrescentando-a á primeira, temos (137, — 1º) :

$$a + d > b + c \quad \text{ou} \quad a - c > b - d.$$

138. **Teorema.** — *Multiplicando-se membro a membro varias desigualdades de mesmo sentido e de membros positivos, resulta outra desigualdade de mesmo sentido.*

Seja

$$a > b,\quad a' > b',\quad a'' > b''.$$

Façamos

$$a = b + c,\quad a' = b' + c',\quad a'' = b'' + c'';$$

multiplicando membro a membro, teremos :

$aa'a'' = (b + c)(b' + c')(b'' + c'') = bb'b'' +$ *uma soma de termos todos positivos*, pois que b, b', b'', c, c', c'' são todos positivos.

Dai se deduz :

$$aa'a'' > bb'b''.$$

Observações I. — Se os sinais fossem diferentes, nada se poderia afirmar para o resultado.

II. — Se os dois membros de uma desigualdade fôrem positivos, póde-se elevà-los a qualquer potência, sem mudar o sentido da desigualdade.

III. — Se os dois membros de uma desigualdade fôrem negativos, póde-se, sem mudar o sentido da desigualdade, elevà-los a qualquer potência impar ; elevando-os a uma potência par, a desigualdade muda de sentido.

EXERCICIOS

995. Resolver a desigualdade :

$$\frac{5x}{3} - \frac{2x}{5} < \frac{7x}{4} - 29.$$

996. Achar os valores inteiros de x que verificam a desigualdade :

$$\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} > 15 + \frac{5x}{6}.$$

997. Achar os valores inteiros e positivos de x que verificam a desigualdade :

$$\frac{4x}{3} - \frac{x}{2} < 12 - \frac{7x}{6}.$$

998. Resolver a desigualdade :

$$\frac{a(x-a)}{b} + \frac{b(x-b)}{a} > x.$$

999. Achar os valores inteiros de x que verificam ao mesmo tempo as desigualdades :

$$\frac{5x}{8} - \frac{7x}{12} + \frac{5}{6} > \frac{15x}{24} + 1 - \frac{13x}{18},$$
$$\frac{2x}{3} - \frac{5}{6} + \frac{11x}{12} < \frac{7x}{18} + \frac{19}{3}.$$

1000. Mesma pergunta para

$$\frac{x}{2} - 78 < \frac{x}{7} - \frac{x}{5} \quad \text{e} \quad \frac{7x}{3} - \frac{x}{4} > \frac{5x}{12} + 40.$$

1001. Entre que limite póde variar x para satisfazer ao mesmo tempo :

$$x-11<\frac{x}{2}+\frac{x}{3} \quad \text{e} \quad \frac{3x-16}{5}>\frac{x}{3}.$$

1002. Mesma pergunta para

$$\frac{x-2}{2}-\frac{12-x}{2}<\frac{5x-36}{4}-1 \quad \text{e} \quad \frac{5x-6}{3}<x+2.$$

1003. Provar que as desigualdades $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ e $x^2+y^2>xy$ são sempre verificadas.

1004. Provar que a desigualdade

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}>2$$

é sempre verificada.

1005. Mostrar que $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ é sempre verificada, isto é, que a média aritmética de 2 numeros é superior ou igual á sua média geométrica.

1006. Verificar a desigualdade :

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc.$$

1007. Verificar a desigualdade :

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geqslant 6abc.$$

1008. Sabendo que

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}<\frac{e}{f},$$

mostrar que

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c+e}{b+d+f}<\frac{e}{f}.$$

CAPITULO VII

ANALISE INDETERMINADA DO PRIMEIRO GRÁU

(Vêr outro mét odo na Aritmética, c. sup., mestre, nº 3317, 3318 e 3319.)

Resolução da equação $ax+by=c$.

139. Quando houver mais incógnitas do que equações, ha em geral una infinidade de raises (n.º 119). A análise indeterminada ensina a achar as raises inteiras positivas, ou nulas do problema.

O caso mais simples é o da equação do 1º gráu a 2 incognitas, como :

$$ax+by=c.$$

Nessa equação podemos supôr sempre a, b, e c primos entre si, porque, se não o fossem, dividiriamos os dois membros da equação pelo maximo divisor comum de a, b e c.

140. **Teorema.** — *Simplificando o mais possivel a equação* ax+by=c, *se* a *e* b *não fôrem primos entre si, a equação não admite soluções inteiras.*

Com efeito, seja d um divisor de a e b que não divida c; sejam p e q os quocientes de a e b por d ; temos:

$$a=pd \quad \text{e} \quad b=qd;$$

e a equação

$$ax+by=c$$

torna-se :

$$pdx+qdy=c,$$

ou ainda :

$$px+qy=\frac{c}{d}.$$

Se x e y fôrem inteiros, o 1º membro desta equação é inteiro e não póde igualar o 2º membro, que é fracionario.

Logo, x e y não pódem ser inteiros e resolver a equação neste caso.

141. **Teorema.** — *Se* m *e* n *fôrem duas soluções inteiras da equação* ax+by=c, *e* t *um inteiro qualquer, a equação será satisfeita tambem pelos valores :*

$$x=m+bt,$$
$$y=n-at.$$

Com efeito, temos :

$$ax+by=c,$$
$$am+bn=c.$$

Dai tira-se :

$$x=\frac{c-by}{a}=\frac{am+bn-by}{a}=m+b\frac{n-y}{a}.$$

Fazendo

$$\frac{n-y}{a}=t$$

(t, sendo um inteiro qualquer)

vem

$$x=m+bt,$$

e

$$y=n-at,$$

fórmulas que dão para a equação $ax+by=c$ uma infinidade de soluções inteiras, quando :

$$t=0, 1, 2, 3,.....$$

142. **Notas.**— 1.º Na análise indeterminada do 1.º gráu, a maior dificuldade é obter uma solução em números inteiros. — Achada esta única solução, $x=m$, $y=n$, as outras facilmente se obtêm com as fórmulas :

$$x=m+bt,$$
$$y=n-at,$$

em que se faz sucessivamente :

$$t=1, \quad t=2, \quad t=3, \text{ etc.}$$

2º As fórmulas

$$x=m+bt,$$
$$y=n-at,$$

resolvem em soluções inteiras a equação $ax+by=c$.

Como t é qualquer, póde tomar um valor negativo e as formulas de resolução são tambem :

$$x=m-bt,$$
$$y=n+at.$$

3º Se um dos coeficientes de x ou de y, a por exemplo, fôr a unidade, a equação é :

$$x+by=c.$$

Uma solução inteira vem logo fazendo $y=0$, pois então :

$$x=c \text{ e } y=0.$$

Portanto, na análise indeterminada, procura-se uma equação em que um dos coeficientes a ou b seja 1 : então, dá-se o valor 0 á incognita de coeficiente diferente de 1, e a outra incógnita vale o número inteiro c.

143. **Casos práticos de análise indeterminada.** — 1º *Achar as soluções inteiras da equação*

$$4x+13y=3.$$

Temos

$$x=\frac{3-13y}{4}=-3y+\frac{3-y}{4}.$$

Façamos

$$\frac{3-y}{4}=t \text{ (}t\text{, sendo um inteiro qualquer),}$$

vem

$$y=3-4t\,;$$

e depois

$$x=\frac{3}{4}-\frac{39}{4}+13t=\frac{-36}{4}+13t=-9+13t.$$

As soluções inteiras são, pois contidas nas formulas

$$x=-9+13t,$$
$$y=\ 3-4t,$$

onde se faz sucessivamente

$$t=0,1,2,3,.....,-1,-2,-3.....$$

144. — 2º *Achar as soluções inteiras da equação*

$$7x+12y=15.$$

Temos

$$x=\frac{15-12y}{7}=2-y+\frac{1-5y}{7}.$$

Façamos

$$\frac{1-5y}{7}=t, \text{ (}t\text{, sendo um inteiro qualquer),}$$

vem

$$y=\frac{1-7t}{5}=-t+\frac{1-2t}{5}.$$

Façamos ainda

$$\frac{1-2t}{5}=s \text{ (}s\text{, sendo outro inteiro qualquer),}$$

vem

$$t=\frac{1-5s}{2}=-2s+\frac{1-s}{2}.$$

Finalmente façamos

$$\frac{1-s}{2}=r \text{ (}r\text{, sendo outro inteiro qualquer),}$$

vem

$$s=1-2r,$$

e por substituições sucessivas

$$t=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+\frac{10r}{2}=-2+5r,$$

$$y=\frac{1}{5}+\frac{14}{5}-7r=3-7r,$$

$$x=\frac{15}{7}-\frac{36}{7}+12r=-3+12r.$$

As soluções inteiras são, pois, dadas pelas formulas

$$x=-3+12r$$
$$y=3-7r$$

onde se faz sucessivamente

$$r=0,1,2,3,\ldots,-1,-2,-3,\ldots$$

Nota. — Ha vantagem em começar o cálculo pela incógnita, x ou y, que tem o menor coeficiente; acaba mais depressa.

145. Regra. — Para se achar as soluções inteiras da equação $ax+by=c$ é preciso :

1.º *Resolver a equação em relação a* x *e efetuar a divisão, tanto quanto possivel, no segundo membro ;*

2.º *Igualar a fração do quociente no segundo membro a uma indeterminada* t ; *resolver esta equação entre* t *e* y, *em relação a* y, *e efetuar a divisão, tanto quanto possivel, no segundo membro ;*

3.º *Igualar a fração do quociente no segundo membro a uma indeterminada* s ; *resolver esta equação entre* s *e* t, *em relação a* t, *e efetuar a divisão tanto quanto possivel ;*

4.º *Continuar assim por diante até não se obter mais parte fracionária no quociente ;*

5.º *Por substituições sucessivas resolvem-se finalmente* x *e* y *em relação á ultima indeterminada escolhida.*

145 *bis*. Teorema. — *Se* a *e* b *fôrem primos entre si na equação* ax+by=c, *simplificada o mais possivel, ha uma infinidade de soluções inteiras, positivas ou negativas.*

Com efeito, na 1.ª operação do método indicado, é preciso dividir o maior coeficiente das incógnitas pelo menor; na 2.ª, o menor coeficiente pelo resto da divisão ; na 3.ª, o 1.º resto pelo 2.º, e assim por diante ; os 2 coeficientes de x e y são tratados pelo processo do m. d. c. ; como são primos entre si,

encontrar-se-á fatalmente o resto 1, que servirá de coeficiente á *penúltima* das indeterminadas introduzidas durante o cálculo; e vem logo uma solução inteira (n.º 142, 3.º) e portanto, uma infinidade de soluções inteiras, positivas ou negativas.

146. Caso de soluções inteiras e positivas. — Ás vezes os problemas comportam apenas soluções positivas ; então escolhem-se os valores da indeterminada de modo a se conservarem só as raises que satisfazem a esta condição.

No caso em que houver 2 equações a 3 incógnitas, 3 equações a 4 incógnitas, etc., reduz-se o sistema por eliminação a não ter senão uma equação a duas incógnitas que se resolve como acima.

147. Caso em que houver mais de uma incógnita a mais do que o número das equações.

Seja resolver a equação :

$$8x+5y+7z=48$$

Resolvendo em relação a y, que tem o menor coeficiente, temos

$$y=\frac{48-8x-7z}{5}=9-x-z+\frac{3-3x-2z}{5}.$$

Façamos

$$\frac{3-3x-2z}{5}=t \quad (t,\ \text{sendo, um inteiro qualquer}),$$

e resolvendo em relação a z, que tem o menor coeficiente, vem

$$z=\frac{3-3x-5t}{2}=1-x-2t+\frac{1-x-t}{2}.$$

Façamos tambem

$$\frac{1-x-t}{2}=s \quad (s,\ \text{sendo outro inteiro qualquer}),$$

vem

$$x=1-t-2s.$$

Substituindo este valor de x nos valores de y e de z, vem

$$z=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{3t}{2}+3s-\frac{5t}{2}=3s-t,$$

$$y=\frac{48}{5}-\frac{8}{5}+\frac{8t}{5}+\frac{16s}{5}-\frac{21s}{5}+\frac{7t}{5}=8+3t-s.$$

As soluções são, pois,

$$x=1-t-2s,$$
$$y=8+3t-s,$$
$$z=3s-t,$$

em que s e t são inteiros quaisquer, positivos, negativos, ou nulos.

148. **Observação.** — Uma equação do 1.º gráu a m incógnitas não admite soluções inteiras se, depois de simplificada, os coeficientes das incógnitas não fôrem primos entre si.

(Mesma demonstração que no n.º 140.)

EXERCICIOS SOBRE A ANALISE INDETERMINADA DO PRIMEIRO GRÁU

Achar as soluções inteiras das equações :

1009. $9x-5y=30$

1010. $3x-32y=24$

1011. $4x+7y=28$

1012. $121x-200y=500$

1013. $x-2y=15$

1014. $2x-9y=60$

1015. $3x+10y=40$

1016. $5x-12y=45$

1017. $2x-11y=52$

1018. $3x-5y=19$

Achar as soluções inteiras e positivas das equações que vão do nº 2402 até 2409.

Problemas.

1019. As idades de dois meninos são tais que, duplicando o numero de anos do 1.º e triplicando o numero de anos do 2.º, a soma iguala 20. Quantos anos tem cada um ?

1020. Repartir a fração $\frac{56}{64}$ em duas outras cujos denominadores sejam 4 e 8.

1021. Trinta pessôas, homens, mulheres e crianças, gastaram juntas 69$600. Cada homem pagou 4$200, cada mulher 1$650 e cada criança $300. Havia quantos homens, quantas mulheres e quantas crianças ?

1022. Uma cesta contem laranjas e limões : os 2/5 das primeiras mais o 3/4 dos segundos fazem 20. Ha quantas frutas de cada especie ?

1023. Achar 2 números tais que o excesso de 17 vezes o primeiro sobre 26 vezes o segundo faça 7.

1024. João e Luiz têm juntos 159$; a quantia de Luiz é divisivel por 8 e a de João por 13. Quanto possue cada um ?

1025. Achar dois números tais que o excesso da sua soma sobre o duplo de sua diferença seja 100.

1026. Vinte e tres pessôas, homens, mulheres e crianças gastaram juntos 80$; cada homem gastou 5$, cada mulher 3 $ e cada criança 2$. Havia quantos homens, quantas mulheres e quantas crianças ?

1027. Doze convidados beberam 36 garrafas de vinho a 1$, a 3$ e a 4$ a garrafa ; o gasto total em vinho foi 100$. Quantas garrafas beberam de cada especie de vinho ?

1028. Qual é a fração que se torna 16 vezes maior quando se invertem os dois termos ?

1029. Achar dois números tais que, subtraindo do triplo do primeiro 7 vezes o segundo, o resto seja igual a 88.

1030. Comprei 100 aves por 201$; a saber : frangos a 1$400 cada um, galinhas a 1$600 e gansos a 5$. Quantas aves de cada especie ?

1031. Um homem comprou 100 objetos por 100$; a saber : livros a 5$ cada um, caixas de tintas a 1$ cada uma e lapis a $050 cada um. Quantos objetos comprou de cada especie ?

1032. Achar dois números tais que a diferença entre 7 vezes o 1.º e 11 vezes o 2.º seja 21.

1033. Um livro tem menos de 250 paginas ; contando-as 7 a 7, sobram 2, e contando-as 11 a 11 sobram 9. Quantas paginas tem ?

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRÁU

CAPITULO PRIMEIRO

RADICAIS

I. Preliminares.

149. **Potência de uma quantidade.** — *Potência* mª, *ou de ordem m*, de uma quantidade é o produto de m factores iguais a esta quantidade.

Desta definição resulta que

$$a^3 = a.a.a \quad \text{e} \quad a^2 = a.a.$$

150. **Teorema.** — *A potência* mª *de um produto obtem-se elevando cada factor a esta potência.*

Seja, por exemplo, elevar abc á quarta potência.

Temos, por definição :

$$(abc)^4 = abc.abc.abc.abc. = a^4b^4c^4.$$

Corolario I. — *Para se obter o quadrado de um monómio eleva-se o coeficiente ao quadrado e duplicam-se os expoentes de todas as letras deste monómio.*

Temos, com efeito,

$$(3a^2b^3c)^2 = 3^2(a^2)^2(b^3)^2c^2 = 3^2a^4b^6c^2.$$

Corolário II. — *Para se obter o cubo de um monómio eleva-se o coeficiente ao cubo e triplicam-se os expoentes de todas as letras.*

Com efeito, póde-se escrever

$$(-2a^2b^3c)^3 = (-2)^3(a^2)^3(b^3)^3c^3 = -8a^6b^9c^3.$$

Corolário III. — *Para se elevar uma fração a qualquer potência, eleva-se cada termo a essa potência.*

Assim

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

151. **Rais** m^a **de uma quantidade.** — Rais m^a de uma quantidade é outra quantidade cuja potência m^a reproduz a primeira.

Assim a rais cubica de a^6 é a^2, porque $(a^2)^3 = a^6$.

Desta definição resulta que :

$$(\sqrt[m]{a})^m = a, \qquad (\sqrt[3]{a})^3 = a, \qquad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Coralário I. — *A rais cubica de um número tem o sinal deste número.*

Ex. — 1º A raiz cubica de a^6 é $+ a^2$, porque $(a^2)^3 = a^6$.

2º A rais cubica de $- a^6$ é $- a^2$, porque $(-a^2)^3 = -a^6$.

Corolário II. — *Um número positivo tem duas raises quadradas iguais mas de sinais contrários.*

Com efeito, a rais quadrada de a^4 é a^2 ou $-a^2$, porque temos

$$(a^2)^2 = a^4 \quad \text{e} \quad (-a^2)^2 = a^4.$$

Corolário III. — *Para se obter a rais* mª *de uma fração, extrai-se a rais* mª *de cada termo da fração.*

Por exemplo, a rais cubica de $\frac{a}{b}$ é $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$,

porque

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{a}{b}.$$

Corolário IV. — *A rais quadrada de um numero negativo é imaginária.*

Seja o numero negativo $-a^2$. A rais quadrada deste numero não póde ser nem $+a$ nem $-a$, porque os quadrados destes dois números produzem $+a^2$ e não $-a^2$.

Define-se um numero imaginário dizendo que *é a rais quadrada de um número negativo. As expressões*

$$\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-9}, \quad \sqrt{-20}, \quad \sqrt{-100},$$

são imaginárias. Seus quadrados são respetivamente :

$$-1, \quad -9, \quad -20, \quad -100$$

152. **Teorema.** — *Para se obter a rais* mª *de um produto, extrai-se a rais* mª *de cada factor.*

Devemos ter

$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}.$$

Com efeito, elevando á potência m^a cada membro desta igualdade, ela se transforma numa identidade.

Podemos escrever então :

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c} \quad \text{e} \quad \sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}.$$

II. Propriedades dos radicais.

153. **Teorema.** — *Póde-se passar o coeficiente de um radical, debaixo deste radical, comtanto que se eleve esse coeficiente á potência indicada pelo indice.*

Teremos, por exemplo,

$$a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}.$$

Com efeito, esta igualdade transforma-se em identidade, elevando-se os dois membros ao cubo. O cubo do primeiro membro é

$$(a\sqrt[3]{b})^3 = a^3(\sqrt[3]{b})^3 = a^3b,$$

e o cubo do segundo membro é

$$(\sqrt[3]{a^3b})^3 = a^3b.$$

Em virtude deste teorema, póde-se escrever :

1º $5\sqrt{3} = \sqrt{25.3} = \sqrt{75}$;

2º $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4^3.2} = \sqrt[3]{128}$.

154. **Recíproca.** — *Estando um factor debaixo de um radical póde-se passar este factor fóra do radical, comtanto que se extraia dele a raiz indicada pelo indice.*

Com efeito, acabamos de demonstrar que temos

$$a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^mb}.$$

Esta igualdade póde escrever-se

$$\sqrt[m]{a^mb} = a\sqrt[m]{b},$$

o que demonstra a reciproca.

Disso resulta que temos, aplicando este teorema,

1º $\sqrt{25a^2b^4c} = 5ab^2\sqrt{c}$,

2º $\sqrt[3]{-a^6b^4c^5} = \sqrt[3]{-a^6b^3c^3bc^2} = -a^2bc\sqrt[3]{bc^2}$.

155. **Teorema.** — *Não se altera o valor de um radical multiplicando-se ou dividindo-se por um mesmo número o seu indice e os expoentes dos factores debaixo do radical.*

Devemos ter, por exemplo,

$$\sqrt[9]{a^6} = \sqrt[9\times3]{a^{6\times3}} = \sqrt[27]{a^{18}}.$$

Com efeito, esta igualdade é exata, pois vem a ser uma identidade elevando-lhe os dois membros á potencia 27^a.

Elevando o primeiro membro, temos :

$$(\sqrt[9]{a^6})^{27} = [(\sqrt[9]{a^6})^9]^3 = (a^6)^3 = a^{18}.$$

O segundo membro dá tambem

$$(\sqrt[27]{a^{18}})^{27} = a^{18}.$$

A reciproca é evidente.

Podemos, pois, escrever :

1º $\sqrt[2]{a} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[8]{a^4} = \sqrt[14]{a^7} = \ldots..$

2º $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[9]{a^6} = \sqrt[12]{a^8} = \ldots..$

3º $\sqrt[16]{a^{32}} = \sqrt[8]{a^{16}} = \sqrt[4]{a^8} = \sqrt[2]{a^4} = a^2$.

4º $\sqrt[105]{a^{30}} = \sqrt[21]{a^6} = \sqrt[7]{a^2}$.

156. **Simplificação dos radicais.** — Para simplificar um radical, é preciso :

1.º *Dividir o indice e os expoentes por seus divisores comuns, se fôr possivel ;*

2.º *Tirar para fóra do radical os factores cujo expoente é multiplo do indice.*

Aplicando esta regra, temos :

1º $\sqrt{a^4b^3c^6} = \sqrt{a^4b^2c^6.b} = a^2bc^3\sqrt{b}$.

2º $\sqrt[3]{a^7b^5c^6} = \sqrt[3]{a^6b^3c^6ab^2} = a^2bc^2\sqrt[3]{ab^2}$.

3º $\sqrt[6]{a^{10}c^9d^{14}} = \sqrt[6]{a^6c^6d^{12}a^4c^3d^2} = acd^2\sqrt[6]{a^4c^3d^2}$.

4º $\sqrt[8]{a^{12}b^{10}c^4} = \sqrt[8]{a^8b^8.a^4b^2c^4} = ab\sqrt[4]{a^2bc^2}$.

III. Cálculo dos radicais.

157. **Redução dos radicais ao mesmo indice. Regra.** — *Para se reduzir vários radicais ao mesmo indice, multiplicam-se*

o indice e os expoentes de cada radical pelo produto dos indices dos outros radicais.

Sejam os dois radicais $\sqrt{a^5}$ e $\sqrt[3]{a^4}$. Estes dois radicais não mudam de valor multiplicando o indice e o expoente de cada um pelo indice do outro ; eles vêm a ser :

$$\sqrt[2\cdot3]{a^{5\cdot3}} \quad \text{e} \quad \sqrt[3\cdot2]{a^{4\cdot2}}, \quad \text{ou ainda} \quad \sqrt[6]{a^{15}} \quad \text{e} \quad \sqrt[6]{a^8}.$$

158. **Produto de varios radicais. Regra.** — *Para multiplicar varios radicais, é preciso : 1.º reduzi-los ao mesmo indice ; 2.º fazer o produto das quantidades que estão debaixo dos radicais ; 3.º dar ao produto o radical comum.*

Sejam os radicais de mesmo indice, $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[3]{a^2b^2}$, teremos :

$$\sqrt[3]{a^4}.\sqrt[3]{b^2}.\sqrt[3]{a^2b^2} = \sqrt[3]{a^4.b^2.a^2b^2}.$$

Com efeito, esta igualdade se transforma numa identidade elevando-lhe os dois membros ao cubo.

Podemos, pois, escrever :

1º $\sqrt{a^3}.\sqrt{a}.\sqrt{a^5}.\sqrt{a^3}=\sqrt{a^3.a.a^5.a^3}.=\sqrt{a^{12}}=a^6.$

2º $\sqrt[3]{a^2}.\sqrt{a^3}=\sqrt[6]{a^4}.\sqrt[6]{a^9}=\sqrt[6]{a^{13}}=\sqrt[6]{a^{12}.a}=a^2\sqrt[6]{a}.$

3º $\sqrt[3]{a^5}.\sqrt[3]{ab^2}.\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^5.ab^2.b}=\sqrt[3]{a^6b^3}=a^2b.$

159. **Observação.** — No produto de dois radicais imaginários, é preciso ter em conta a definição de $\sqrt{-1}$ (151, cor. IV).

Fazemos o produto $\sqrt{-a^2}\ \sqrt{-b^2}$, escrevendo primeiro :

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{(-1)a^2} = a\sqrt{-1};$$
$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{(-1)b^2} = b\sqrt{-1}.$$

O produto dos dois imaginarios será :

$$\sqrt{-a^2}\sqrt{-b^2}=a\sqrt{-1}\times b\sqrt{-1}=ab(\sqrt{-1})^2=ab(-1)=-ab.$$

Teriamos do mesmo modo :

$$1^\circ\ \sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{(-1)a}\sqrt{(-1)b}=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$
$$=\sqrt{ab}(\sqrt{-1})^2=-\sqrt{ab}.$$

$$2^\circ\ (a+b\sqrt{-1})^2=a^2+b^2(\sqrt{-1})^2+2ab\sqrt{-1}$$
$$=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}.$$

$$3^\circ\ (a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2-(b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2(\sqrt{-1})^2$$
$$=a^2-b^2(-1)=a^2+b^2.$$

160. **Quociente de dois radicais. Regra.** — *Para se dividir dois radicais, é preciso : 1.º reduzi-los ao mesmo indice ; 2.º dividir a quantidade debaixo do primeiro radical por aquela do segundo ; 3.º dar ao quociente o radical comum.*

Devemos ter, por exemplo :

$$\sqrt[6]{a^5}\div\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[6]{a^5\div a^4}=\sqrt[6]{a},$$

Com efeito, elevando á sexta potencia as duas expressões

$$\frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[6]{a^4}} \qquad \text{e} \qquad \sqrt[6]{a^5\div a^4},$$

obtemos a identidade

$$\frac{a^5}{a^4}=a^5\div a^4.$$

Podemos, segundo a regra, escrever as igualdades seguintes :

$$\sqrt[3]{a^5}\div\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[3]{a}$$
$$\sqrt{a^5b^3}\div\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^5b^3\div a^3b}=\sqrt{a^2b^2}=ab.$$
$$\sqrt{a}\div\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^3}\div\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[6]{a}.$$

161. **Potência de um radical. Regra.** — *Para se elevar um radical a qualquer potência, eleva-se a esta potência a quantidade submetida ao radical.*

Devemos ter, por exemplo :

$$(\sqrt[3]{a^2})^5=\sqrt[3]{a^{2\cdot5}}=\sqrt[3]{a^{10}}.$$

Com efeito, temos (158) :

$$(\sqrt[3]{a^2})^5=\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a^{10}}.$$

162. **Raís de um radical. Regra.** — *Para se extrair a rais* m^a *de um radical, basta multiplicar por* m *o indice deste radical.*

Teremos, por exemplo,

$$\sqrt[3]{\sqrt[7]{a}}=\sqrt[21]{a}.$$

Com efeito, elevemos cada membro á potencia 21ª ; o primeiro membro dá (151) :

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{a}}\right)^{21}=\left[\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{a}}\right)^{7}\right]^{3}=\left(\sqrt[3]{a}\right)^{3}=a,$$

e o segundo,

$$\left(\sqrt[21]{a}\right)^{21}=a.$$

Como os dois membros vêm a ser identicos, a igualdade está demonstrada.

Conforme a regra, temos :

1° $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}=\sqrt[6]{a^3}=\sqrt{a}.$

2° $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^6}}}=\sqrt[8]{a^6}=\sqrt[4]{a^3}.$

3° $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{a^2b^3}}}=\sqrt[24]{a^2b^3}.$

IV. Transformação das frações de denominadores irracionais.

Uma quantidade é *racional* quando não contem nenhum radical ou expoente fracionário ; é irracional no caso contrário.

163. **Regra.** — *Para se tornar racional o denominador de uma fração, multiplicam-se os dois termos por um factor tal que o denominador venha a ser racional.*

Aplicações. — 1.° *Tornar racional o denominador da fração* $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Multiplicando-se os dois termos desta fração pelo factor a, éla dá :

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a)^2}}=\frac{\sqrt{a}}{a}.$$

2° *Tornar racional o denominador da fração* $\frac{m}{a+\sqrt{b}}$.

Basta multiplicar os dois termos por $a-\sqrt{b}$, e vem

$$\frac{m}{a+\sqrt{b}}=\frac{m(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})\,(a-\sqrt{b})}=\frac{m(a-\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

V. Quantidades imaginárias.

164. — *Aplicam-se ás expressões imaginárias todas as regras de cálculo das quantidades reais.*

165. — *Forma geral dos imaginários* : $a\sqrt{-1}$.

Toda a quantidade imaginaria $\sqrt{-a^2}$, póde-se reduzir á forma $a\sqrt{-1}$, a sendo real.

Seja $\sqrt{-20}$; temos

$$\sqrt{-20}=\sqrt{20(-1)}=\sqrt{20}\sqrt{-1}=4{,}472...\sqrt{-1}.$$

166. — *Potências sucessivas de* $\sqrt{-1}$. — *Temos sucessivamente* :

1ª potência $\sqrt{-1}$ =.........$+\sqrt{-1}$ por identidade.

2ª potência $(\sqrt{-1})^2$=.........-1 por definição.

3ª potência $(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}.$

4ª potência $(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2=+1.$

5ª potência $(\sqrt{-1})^5=(\sqrt{-1})^4\sqrt{-1}=+\sqrt{-1}.$

Vê-se que as potências de $\sqrt{-1}$ se reproduzem periodicamente e na mesma ordem a partir da quarta.

167. — *Multiplicação dos imaginários.* — Seja multiplicar $a\sqrt{-1}$ por $b\sqrt{-1}$. Temos :

$$a\sqrt{-1}\times b\sqrt{-1}=ab\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-ab.$$

Temos ainda :

$$(a+b\sqrt{-1})^2=a^2+2ab\sqrt{-1}+b^2(\sqrt{-1})^2=a^2+2ab\sqrt{-1}-b^2.$$

Temos ainda :

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2-b^2(\sqrt{-1})^2=a^2+b^2.$$

168. *Divisão dos imaginários.* — Seja dividir $a\sqrt{-1}$ por $b\sqrt{-1}$.

Temos :

$$\frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=\frac{a}{b}.$$

Seja ainda :

$$\frac{a-\sqrt{-1}}{a+\sqrt{-1}},$$

teremos :

$$\frac{a-\sqrt{-1}}{a+\sqrt{-1}}=\frac{(a-\sqrt{-1})(a-\sqrt{-1})}{(a+\sqrt{-1})(a-\sqrt{-1})}=\frac{(a-\sqrt{-1})^2}{a^2+1}$$

169. *Imaginários conjugados.* — As quantidades $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$ chamam-se *imaginários conjugados* uma de outra.

Dois imaginários são *conjugados* quando diferem apenas pelo sinal de $\sqrt{-1}$.

1091. $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$

1092. $-\sqrt[3]{-\frac{a^6}{b^9}}$

1093. $\sqrt[3]{-a^9b^6c^{15}}$

1094. $\sqrt[11]{\frac{a^4}{(1-a)^6}}$

1095. $\sqrt{a^7}+\sqrt{a^5}-\sqrt{a^3}+\sqrt{a}$

Reduzir ao mesmo indice os radicais seguintes :

1096. $\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}.$

1097. $\sqrt[4]{a^5}, \sqrt[3]{a^7}.$

1098. $\sqrt{a^2b}, \sqrt[3]{a^3b^2}.$

1099. $\sqrt{\frac{1}{a}}, \sqrt[3]{\frac{2}{b^2}}.$

1100. $a^2, \sqrt{b^3}.$

1101. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}.$

1102. $(a+b)^2, \sqrt[3]{a^4}.$

1103. $4, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, a.$

Simplificar as expressões seguintes :

1104. $4\sqrt{8}-6\sqrt{2}$

1105. $2\sqrt{128}-\sqrt{200}$

1106. $\sqrt{24}+3\sqrt{6}$

1107. $\sqrt{216}-\sqrt{150}$

1108. $2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{256}$

1109. $\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{-64}$

1110. $6\sqrt[3]{375}-10\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}$

1111. $a\sqrt[5]{b^6c^7d^3}-c\sqrt[6]{a^{12}b^8c^{32}d^5}$

1112. $\sqrt{\frac{a}{b^3}-\frac{c}{b^2}}+\sqrt{\frac{a}{c^3}-\frac{1}{c}}$

1113. $3\sqrt{2}.4\sqrt{3}.5\sqrt{24}$

1114. $\sqrt{a}.\sqrt[4]{\frac{1}{a^3}}.\sqrt[6]{a^3}$

1115. $\sqrt{-4}-\sqrt{-1}$

1116. $\sqrt{-8}+\sqrt{-32}-2\sqrt{2}$

1117. $a\sqrt{a}.b\sqrt{b}.\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}$

Desenvolver e reduzir as expressões seguintes :

1118. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

1119. $(1-\sqrt{a})^2$

1120. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

1121. $(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})$

1122. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

1123. $(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2$

1124. $(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})^2$

1125. $(\sqrt{-3})^2$

1126. $5\sqrt{-8}.3\sqrt{-32}$

1127. $\sqrt{-a^2}.\sqrt{-b^2}$

1128. $(\sqrt{-5}-\sqrt{-6})^2$

1129. $(3+\sqrt{-4})(3-\sqrt{-4})$

1130. $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$

1131. $(\sqrt{-1})^3$

1132. $(\sqrt{-1})^4$

1133. $(\sqrt{-1})^5$

Efetuar as operações indicadas e reduzir :

1134. $\sqrt{12}\div\sqrt{8}$

1135. $\sqrt{12}\div\sqrt[3]{12}$

1136. $\sqrt[3]{a^5}\div\sqrt{a^3}$

1137. $\sqrt[3]{a^5b^4}\div\sqrt{ab}$

1138. $\sqrt[3]{27a^4b^5c^6}\div\frac{1}{9}\sqrt[3]{9a^2b^4c^5}$

1139. $(-\sqrt[3]{-a^7})\div(-\sqrt{a^5})$

1140. $3\div\sqrt{0{,}0036\div7{,}20}$

1141. $6\div\sqrt[3]{1\div0{,}008}$

1142. $5\sqrt[8]{81}\div\sqrt[4]{9}$

1143. $(a+b)\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\div\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$

1144. $\frac{a}{\sqrt{b}}\div\frac{b}{\sqrt{a}}$

1145. $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}\div\frac{b}{\sqrt{a^3}}$

1146. $\sqrt{-a^3}\div\sqrt{-a^4}$

1147. $\sqrt{-12}\div\sqrt{-6}$

Efetuar e reduzir :

1148. $(\sqrt{4})^2$

1149. $(\sqrt[3]{-a^2})^3$

1150. $(\sqrt{5})^3$

1151. $(3\sqrt[3]{3})^4$

1152. $(\sqrt[3]{a^2})^2$

1153. $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2\left(\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2$

1154. $(\sqrt[3]{9}-\sqrt{2})^2$

1155. $(\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4})^3$

1156. $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{5a^3b}}}\right)^{24}$

1157. $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^3b^2c}}}}\right)^{32}$

1158. $\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{d}}}}\right)^{32}$

1159. $\sqrt{9\sqrt{8}}$

1160. $\sqrt{9\sqrt{16\sqrt{256}}}$

1161. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^{240}}}}}$

1162. $\left(\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[4]{4}}}}\right)^{12}$

1163. $\sqrt{a\sqrt[3]{b}}, \sqrt[3]{b\sqrt{a}}$

Tornar racionais os denominadores das frações seguintes :

1164. $\frac{2}{\sqrt{2}}$

1165. $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

1166. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

1167. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$

1168. $\frac{15}{2\sqrt{3}}$

1169. $\frac{a}{\sqrt[5]{a^4}}$

1170. $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

1171. $\frac{3}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}$

1172. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

1173. $\frac{1}{a-\sqrt{b}}$

1174. $\frac{1}{10+\sqrt{7}}$

1175. $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}$

1176. $\frac{1}{4-\sqrt{3}}$

1177. $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

1178. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$

1179. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

1180. $\frac{1}{2-\sqrt[3]{3}}$

1181. $\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}}$

CAPITULO II

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRÁU

I. Definições.

173. **Equação do segundo gráu.** — Equação do segundo gráu é toda equação cujo maior gráu da incógnita é 2.

Exemplo :

$$4x^2-5x+1=0.$$

A *forma geral* da equação do segundo gráu é

$$ax^2+bx+c=0,$$

na qual a, b, c se chamam coeficientes.

A equação *completa* não póde ter mais de tres termos : um têrmo em x^2, um têrmo em x, e um têrmo *conhecido*.

A equação do segundo gráu é *incompleta* quando não contem o têrmo em x, ou o têrmo conhecido ; tem pois uma das formas seguintes :

$$ax^2+bx=0 \quad \text{ou} \quad ax^2+c=0.$$

Exemplos :

$$x^2-4x=0, \quad x^2-25=0.$$

174. **Preparação da equação.** — Prepara-se a equação do segundo gráu reduzindo-a á forma geral

$$ax^2+bx+c=0.$$

Para se preparar a equação do 2º gráu, *expelem-se os denominadores e fazem-se passar todos os termos para o primeiro membro, que se ordena em relação á incognita.*

A equação

$$\frac{1}{x-3}+4x=\frac{1}{5}.$$

tomará a forma $ax^2+bx+c=0$, expelindo-se os denominadores e fazendo-se depois passar os termos para o primeiro membro. Temos assim :

$$5+20x^2-60x=x-3,$$

e emfim

$$20x^2-61x+8=0.$$

Observação. — Na equação do segundo gráu, a é sempre considerado como positivo ; porque, se não o fôsse, mudar-se-iam todos os sinais para lhe dar o signal *mais*.

II. Equações incompletas do segundo gráu.

175. **Resolução da equação incompleta** $ax^2+bx=0$.

Esta equação póde escrever-se :

$$x(ax+b)=0.$$

Ha dois modos de anular esse produto de dois factores : podemos anular cada factor por sua vez ; temos assim :

$$x=0 \quad \text{e} \quad ax+b=0;$$

então as duas raizes são :

$$x'=0 \quad \text{e} \quad x''=\frac{-b}{a}.$$

Aplicação. — *Resolver a equação* $x^2-4x=0$.

Esta equação póde escrever-se :

$$x(x-4)=0.$$

Para anular o produto $x(x-4)$, é preciso fazer sucessivamente :

$$x=0 \quad \text{e} \quad x-4=0,$$

e temos para as raises da equação proposta :

$$x'=0 \quad \text{e} \quad x''=4.$$

176. **Resolução da equação incompleta** $ax^2+c=0$.

Tirando o valor de x^2, temos

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

Extraindo a rais quadrada dos dois membros, vem :

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

As raises são portanto :

$$x'=\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad x''=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Para que a equação dada tenha raises reais, é preciso, com evidencia, que $-\frac{c}{a}$ seja positivo; isto exige que c e a sejam de sinais contrários.

Aplicações. — 1º *Resolver a equação* $25x^2-16=0$.
Esta equação escreve-se primeiro

$$x^2=\frac{16}{25}.$$

Extraindo-se a raiz quadrada dos dois membros, vem :

$$x=\pm\frac{4}{5}.$$

As raises são :

$$x'=\frac{4}{5} \quad \text{e} \quad x''=-\frac{4}{5}.$$

2º *Resolver a equação* $x^2+4=0$.
Esta equação dá sucessivamente :

$$x^2=-4\,;$$

donde

$$x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{(-1)4}=\pm2\sqrt{-1};$$

$$x'=2\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad x''=-2\sqrt{-1}.$$

As duas raises desta equação são imaginárias ; vê-se tambem que a e c têm mesmo sinal.

II. Equação geral do segundo gráu.

177. Resolução da equação completa. — Seja a forma geral :

$$ax^2+bx+c=0\,;$$

passando o termo conhecido para o 2º membro, vem :

$$ax^2+bx=-c.$$

Multiplicando os dois membros por $4a$, vem;

$$4a^2x^2+4abx=-4ac\,;$$

juntando b^2 a cada membro, vem :

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac.$$

Como o 1º membro é o quadrado de $2ax+b$, temos :

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois membros, temos :

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}\,;$$

donde se tira

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Logo, a equação do segundo gráu tem duas raises que são, designando-as por x' e x'' :

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

A formula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

chama-se *fórmula de resolução* da equação geral do segundo gráu. Dá lugar á regra seguinte.

178. Regra para se obterem as raises de equação do segundo gráu. — Para se resolver uma equação do segundo gráu :

Toma-se em sinal contrario o coeficiente de x *ao qual se acrescenta ou se tira a raiz quadrada do numero formado pelo quadrado do coeficiente de* x *diminuido de quatro vezes o produto do termo conhecido pelo coeficiente de* x^2 *; depois, divide-se o resultado pelo dobro do coeficiente de* x^2.

179. Outra solução. — Seja resolver a equação

$$ax^2+bx+c=0\,;$$

Dividamos tudo pelo coeficiente a, vem :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \text{ou} \quad x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a}.$$

O 1º membro é o começo de um quadrado perfeito, no qual só falta $+\frac{b^2}{4a^2}$; acrescentemos $\frac{b^2}{4a^2}$ a cada membro, temos

$$x^2+\frac{ba}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

ou

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\,;$$

extraindo a raiz quadrada, vem :

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

e afinal :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

179 *bis*. Solução de Viète. — Nesta solução, transforma-se a equação completa do 2.º gráu em outra incompleta, pela supressão do 2.º têrmo. Para conseguir tal resultado, substitue-se a incógnita por uma nova incógnita aumentada de uma indeterminada e calcula-se depois o valor que deve tomar a indeterminada para que se anule o coeficiente do 2.º têrmo.

Façamos $x=y+k$, sendo y a incógnita auxiliar e k a indeterminada, teremos, substituindo o valor de x na equação $ax^2+bx+c=0$:

$$a(y+k)^2+b(y+k)+c=0\,;$$

efetuando e ordenando, vem :

$$ay^2+(2ak+b)y+ak^2+bk+c=0, \qquad (1)$$

anulando o coeficiente de y, vem :

$$2ak+b=0\,;$$

donde se tira :

$$k=\frac{-b}{2a}.$$

Substituindo k por seu valor na equação (1) e efetuando, teremos :

$$ay^2-\frac{b^2}{4a}+c=0\,;$$

donde vem :

$$y=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,;$$

substituindo y e k pelos seus valores na equação $x=y+k$, vem finalmente :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

180 Aplicações. — 1.º *Resolver a equação* $x^2-9x+20=0$.

Para identificar as duas equações

$$ax^2+bx+c=0,$$
$$x^2-9x+20=0,$$

é preciso ter

$$a=1, \qquad b=-9 \quad \text{e} \quad c=20.$$

Levando estes valores na formula de resolução

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

temos

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-4.1.20}}{2.1}=\frac{9\pm1}{2}.$$

As raises da equação dada são pois :

$$x'=\frac{9+1}{2}=5, \qquad x''=\frac{9-1}{2}=4.$$

2º *Resolver a equação*

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{12}.$$

Depois de expelir os denominadores e fazer passar todos os termos para o primeiro membro, obtem-se

$$5x^2-24x-5=0.$$

Para identificar esta equação com a equação geral

$$ax^2+bx+c=0,$$

é preciso ter

$$a=5, \qquad b=-24 \quad \text{e} \quad c=-5.$$

A formula de resolução

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

vem a ser

$$x=\frac{24\pm\sqrt{24^2-4.5(-5)}}{2.5}=\frac{24\pm26}{10}.$$

donde se tira

$$x'=\frac{24+26}{10}=5, \quad \text{e} \quad x''=\frac{24-26}{10}=\frac{-2}{10}=-\frac{1}{5}.$$

3º *Resolver a equação* $mnx^2-(m+n)x+1=0$.

Fazendo :

$$a=mn\,; \qquad b=-(m+n) \quad \text{e} \quad c=1,$$

a formula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

dá

$$x=\frac{(m+n)\pm\sqrt{(m+n)^2-4.mn.1}}{2mn}=\frac{m+n\pm\sqrt{(m-n)^2}}{2mn}.$$

As raisos são, pois :

$$x'=\frac{(m+n)+(m-n)}{2mn}=\frac{2m}{2mn}=\frac{1}{n},$$

$$x''=\frac{(m+n)-(m-n)}{2mn}=\frac{2n}{2mn}=\frac{1}{m}.$$

4º *Resolver diretamente a equação* $x^2+10x+21=0$.

O primeiro membro da equação

$$x^2+10x=-21,$$

representa os dois primeiros termos do quadrado de $x+5$; acrescentando 5^2 aos dois membros, teremos

$$x^2+10x+5^2=5^2-21,$$

ou

$$(x+5)^2=4.$$

A extração da raís quadrada fornece

$$x+5=\pm 2;$$

donde

$$x=\pm 2-5.$$

As raízes são, pois :

$$x'=2-5=-3 \quad \text{e} \quad x''=-2-5=-7.$$

181. — *Caso de* b *par ou resolução de* $ax^2+2b'x+c=0$.

Seja a equação

$$ax^2+2b'x+c=0.$$

na qual b é par e se representa por $2b'$.

A formula de resolução da equação geral dá :

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a},$$

ou dividindo tudo por 2

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

Esta formula é mais simples, e deve aplicar-se todas as vezes que b fôr par.

Aplicações. — Resolver :

$$x^2-8x+15=0 \quad \text{e} \quad x^2-14x+48=0.$$

Temos pela formula de b' :

1º $$x=4\pm\sqrt{16-15}=4\pm 1;$$

donde

$$x'=4+1=5 \quad \text{e} \quad x''=4-1=3.$$

2º $$x=7\pm\sqrt{49-48}=7\pm 1;$$

donde

$$x'=7+1=8 \quad \text{e} \quad x''=7-1=6.$$

IV. Discussão sumária da fórmula de resolução.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

182. Para que as raises da equação $ax^2+bx+c=0$ sejam aceitaveis, é preciso que sejam reais ; para isso é preciso que se possa extrair a raís quadrada de b^2-4ac, o que exige que b^2-4ac seja positivo.

As raises da equação do segundo gráu são pois reais e desiguais se b^2-4ac fôr positivo ; são imaginárias se b^2-4ac fôr negativo.

Além disso, se a quantidade b^2-4ac fôr nula, é visivel que x' e x'' são iguais a $\frac{-b}{2a}$.

Em resumo, se tivermos :

1º $b^2-4ac>0$: as raizes são reais e desiguais ;

2º $b^2-4ac=0$: as raizes são iguais ;

3º $b^2-4ac<0$: as raizes são imaginárias.

A quantidade b^2-4ac se chama *realizante* da equação do 2º gráu.

183. **Aplicações.** — Sem resolver as equações seguintes, dizer se as raizes são reais, iguais ou imaginárias :

1º $x^2-22x+120=0,$

2º $x^2-26x+169=0,$

3º $x^2-10x+26=0.$

1º A primeira equação dá :

$$b^2-4ac=22^2-4.1.120=484-480=4.$$

Como a quantidade de b^2-4ac é positiva, a primeira equação tem raises reais e desiguais.

2º Na segunda, temos :

$$b^2-4ac=26^2-4.1.169=676-676=0.$$

Neste caso, as raises são iguais :

3º Na terceira equação, temos :

$$b^2-4ac=10^2-4.1.26=100-104=-4.$$

Esta equação tem, pois, raises imaginárias.

EXERCICIOS

Resolver as equações seguintes :

1182. $x^2-7x+12=0$
1183. $x^2+7x+12=0$
1184. $x^2-3x-18=0$
1185. $x^2+3x-18=0$
1186. $x^2-9x+20=0$
1187. $x^2-x-20=0$
1188. $x^2+x-20=0$
1189. $x^2-30x+200=0$
1190. $x^2+30x+200=0$
1191. $x^2-10x-200=0$
1192. $x^2+7x+10=0$
1193. $8x^2=6x-1$
1194. $8x^2+1=-6x$
1195. $x^2+100=20x$
1196. $x^2-\frac{x}{5}+\frac{1}{100}=0$
1197. $x^2+\frac{x}{5}+\frac{1}{100}=0$
1198. $2x^2=5x-2$
1199. $10x-3=3x^2$
1200. $x^2=15x-50$
1201. $9x-20-x^2=0$
1202. $22x-x^2=121$
1203. $6x^2-5x+1=0$
1204. $25=15x-2x^2$
1205. $12x-35=x^2$
1206. $-101x+10x^2+10=0$
1207. $25x^2-20x+4=0$
1208. $x^2-6x+8=0$
1209. $2x^2-5x+3=0$
1210. $2x^2-13x+3,125=0$
1211. $x^2+x-2=0$
1212. $x^2+2x-99=0$
1213. $x^2-100x+2500=0$
1214. $x^2+12x+35=0$
1215. $x^2-16x-17=0$
1216. $52x^2-28x+1=0$
1217. $16x^2-8x=15$
1218. $x^2-10,1x+1=0$
1219. $4x^2+3x+0,5=0$
1220. $121x^2-44x=5$
1221. $4x^2=3x+1$
1222. $x^2-20,05x+1=0$
1223. $17x=x^2+66$
1224. $x(x+23)+60=0$
1225. $x(x-19)+84=0$
1226. $x(x+19)+84=0$
1227. $x(3x-10)=-8$
1228. $x(3x+10)=-8$
1229. $10x(10x-4)+3=0$
1230. $x(1000x+710)+7=0$
1231. $(6x-1)(6x-1)=0$
1232. $440=x(3x+14)$
1233. $(x-17)(x-3)=0$
1234. $1-8x(6x-1)=0$
1235. $(x-30)^2=0$
1236. $x(x-2)=2(x+6)$
1237. $x(x+140)-7200=0$
1238. $(x+2)^2=4(6-x)$
1239. $x^2-5(x+10)=0$
1240. $(x-4)^2=64-16x$
1241. $x^2-36-4=8-4x$
1242. $y(y+1)-120+y=0$
1243. $z(2z-92)=z^2+800$
1244. $2y(y-15)+240-y(y+1)=0$
1245. $(y+20)(y-20)+42y=0$
1246. $4x^2-\frac{7x}{2}+\frac{3}{8}=0$
1247. $10x^2-\frac{3}{2}=\frac{11x}{2}$
1248. $10x^2+6=5x\left(x+\frac{31}{5}\right)$
1249. $3x\left(x+\frac{10}{3}\right)-8=0$
1250. $6y^2-\frac{7y}{2}-5=0$
1251. $4(z+3)(z-3)=7z$
1252. $15x^2=\frac{2}{5}(5x+6)+10x^2$
1253. $u+\frac{1}{u-3}=5$
1254. $y-\frac{12-5y}{4(y-3)}=\frac{11}{2}$
1255. $\frac{6x+33}{x}=15-(x-5)$
1256. $4x^2(x+2)^2=8x^4(x+2)^2$
1257. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$
1258. $\frac{y}{y+1}+\frac{y}{y+4}=1$
1259. $\left(\frac{x^2-24}{5}\right)4+(x^2-37)=32$
1260. $(x-3)^2-2(x^2-9)=0$
1261. $(x-1)(x-2)-12=0$
1262. $(x-7)(x+4)-5,75=0$

1263. $(x-7)(x+4)+(x-4)(x-3)=84$
1264. $x=8-\frac{12}{x}$
1265. $x(x-8)+12=0$
1266. $\frac{x-2}{9}=\frac{1}{x-2}$
1267. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{12}$
1268. $\frac{x-1}{x+1}=\frac{7}{3x}$
1269. $2=\frac{2x-20}{2x-8}-x$
1270. $\frac{3(2x-1)}{2x+1}-\frac{2(2x+1)}{2x-1}-5=0$
1271. $\frac{x-1}{x/2-1}-\frac{x-3}{x/2-2}+\frac{1}{6}=0$
1272. $\frac{9x^2}{5}-\frac{7x}{3}+2=2x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$
1273. $3(x-5)(x-2)=7(x-4)(x-6)-48$
1274. $\frac{x-10}{x+10}=\frac{37+x}{23-x}$
1275. $\frac{4}{7(x^2-1)}+\frac{1}{9(x+1)}=\frac{1}{63}$
1276. $\frac{x+6}{x-6}+\frac{x-6}{x+6}=\frac{17}{4}$
1277. $\frac{x-5}{2}=\frac{5}{x-2}$
1278. $\frac{x^2-36}{8}+\frac{x^2-64}{6}=14$
1279. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x+1}{x+1}$
1280. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+6}{x-3}$
1281. $\frac{2x-1}{x-1}-\frac{2x-3}{x-2}+\frac{1}{6}=0$
1282. $\frac{3y+21}{y+1}=\frac{2y+1}{y-1}$
1283. $\frac{x^2-1}{x-1}=0$
1284. $\frac{x^2+1}{x+1}=0$
1285. $\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{2x+2}+\frac{1}{4}$
1286. $\frac{4}{x+2}-\frac{12}{x+6}+\frac{5}{x+4}=0$
1287. $\sqrt{x^2+9}=5$
1288. $\frac{118\sqrt{x}}{2}=59-\frac{\sqrt{x}}{4}+\frac{1}{4}$
1289. $\sqrt{x+16}=\sqrt{3x+9}-1$
1290. $x+\sqrt{x}-20=0$
1291. $4x-3\sqrt{x}-27=0$

Resolver as equações literais seguintes :

1292. $x^2-(a+b)x+ab=0$
1293. $x^2-2ax+a^2=0$
1294. $x^2-2(a+b)x+4ab=0$
1295. $x^2-2ax+a^2-1=0$
1296. $x^2-(2a+1)x+a^2+a=0$
1297. $a^2x^2-2ax-3=0$
1298. $abx^2-(a+b)x+1=0$
1299. $abx^2-(a-b)x-1=0$
1300. $ax^2-(a^2+1)x+a=0$
1301. $x^2-9ax-10a^2=0$
1302. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$
1303. $bx^2-(ab^2+a)x+a^2b=0$
1304. $x^2-2(a+b)x+(a+b)^2=0$
1305. $m^2y^2-5my+4=0$
1306. $y^2-a^2b^2y^2+a^2b^2y-a^2b^2=0$
1307. $x^2-2ax+a^2-(b+c)^2=0$
1308. $x^2+2ax-a^2+1=0$
1309. $a^2x^2-2a^3x+a^4-1=0$
1310. $x^2-2ax+a^2-100=0$
1311. $4x^2-16ax+16a^2-b^4=0$
1312. $2ax^2-(a^2+4)x+2a=0$
1313. $x^2-(2a^2+2b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$
1314. $x^2-2ax=b^2-a^2$
1315. $x(x-2a^2)+a^4-b^4=0$
1316. $\frac{2y+13}{y+16}-\frac{y-1}{y+1}=\frac{y-a}{y+a}$
1317. $\frac{2x}{x-a}=1+\frac{2x}{a}+\frac{2x+2a}{a-x}$
1318. $\frac{x}{m}+\frac{m}{x}=\frac{x}{n}+\frac{n}{x}$
1319. $\frac{x^2+1}{x}=\frac{6m-x}{2m^2}+x$
1320. $x^2(m+1)-3mx+2m-1=0$
1321. $\frac{x+b}{a}=\frac{x}{x-b}$
1322. $\frac{x-b}{b}=\frac{2b}{x-b}$
1323. $\frac{1}{x-m}+\frac{1}{x-n}-\frac{1}{x-p}=0$
1324. $\frac{x-a}{x+a}=\frac{b-x}{b+x}$
1325. $\frac{abx^2}{4}=\frac{a+b}{2}\times x-1$

Resolver as equações incompletas seguintes :

1326. $x^2-x=0$
1327. $4x^2-12x=0$
1328. $x^3-x^2=0$
1329. $8x^2-2x=0$
1330. $4x^2-1=0$
1331. $3x^2-12=0$
1332. $7x^2+21x=0$
1333. $11x^2-44x=0$
1334. $5x^2+40x=0$
1335. $\frac{2x^2}{3}+\frac{3x}{2}=0$
1336. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2x^2}{c^2}-1=0$
1337. $7x=21x^2$
1338. $3x^2=27$
1339. $\frac{x^2}{2}=\frac{a^4}{3}$
1340. $0{,}001x^2-10=0$
1341. $x^4-x^2=0$
1342. $x^2-a^2=0$
1343. $4x^2=a^4$
1344. $9=3(x^2-1)$
1345. $bx^2+a^2b=ax^2+ab^2$
1346. $x^2-16x=0$
1347. $4ax^2-bx=0$
1348. $x^4-ax^3=0$
1349. $(a+b)x^2=(a^2-b^2)x$
1350. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2x^2}{c^2}=0$
1351. $\frac{4}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{1}{3}$
1352. $\frac{3(x^2-11)}{5}=\frac{2(x^2-60)}{7}+36$
1353. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x-1}$
1354. $\frac{y-2}{y+2}+\frac{y+2}{y-2}=\frac{13}{6}$
1355. $\frac{x^2-5}{4}=\frac{x^2+3}{12}$

CAPITULO III

PROPRIEDADES E DISCUSSÃO DAS RAÍSES DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRÁU

I. Propriedades das raíses.

184. **Teorema.** — *A somma das raises da equação*

$$ax^2+bx+c=0$$

é igual ao coeficiente de x tomado em sinal contrário e dividido pelo coeficiente de x^2.

Devemos ter

$$x'+x''=-\frac{b}{a}.$$

Com efeito, temos :

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Somando membro a membro, vem :

$$x'+x''=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

185. **Teorema.** — *O produto das raises é igual ao têrmo conhecido dividido pelo coeficiente de* x^2.

Devemos ter

$$x'x''=\frac{c}{a}.$$

Com efeito, temos :

$$x'x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

186. **Teorema.** — *Se* x' *e* x'' *são as duas raises da equação* $ax^2+bx+c=0$, *o primeiro membro é divisivel sucessivamente por* $x-x'$ *e* $x-x''$.

Com efeito (nº 59) o polinómio ax^2+bx+c anula-se substituindo x por x' e por x''.

187. **Teorema.** — *O primeiro membro da equação* $ax^2+bx+c=0$ *iguala a* $(x-x')(x-x'')$.

Com efeito, o polinomio ax^2+bx+c, é divisivel por $x-x'$ e por $x-x''$, e podemos escrever

$$ax^2+bx+c=(x-x')(x-x'')Q.$$

Ora, os dois membros desta identidade são do segundo gráu e os termos de mesmo gráu devem ser iguais dois a dois; portanto,

$$ax^2=Qx^2,\quad \text{isto é,}\quad a=Q.$$

Logo, temos :

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'').$$

188. — *A diferença das raises* $x'-x''$ *da equação do segundo gráu iguala* $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$.

Com efeito, temos :

$$x'-x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}.$$

II. Aplicações

189. — *Achar a soma e o produto das raíses de cada uma das equações seguintes :*

$$1^o \ 4x^2-7x+3=0,$$
$$2^o \ x^2+11x+28=0.$$

Conforme os teoremas (184-185), temos :

$$1^o \quad x'+x''=\frac{-b}{a}=\frac{7}{4} \quad \text{e} \quad x'x''=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}.$$
$$2^o \quad x'+x''=\frac{-b}{a}=-11 \quad \text{e} \quad x'x''=\frac{c}{a}=28.$$

190. *Dadas as equações de raises reais*

$$x^2-5x+4=0,$$
$$x^2+3x-4=0,$$

achar, sem resolver, os sinais das raises.

Na primeira equação, o produto das raíses é 4 ; como é positivo, as duas raises são de mesmo sinal ; como a soma das raíses é tambem positiva, pois iguala 5, ambas as raíses são, portanto, positivas.

Na segunda equação, temos

$$x'x''=-4 \quad \text{e} \quad x'+x''=-3.$$

Como o produto das raíses é negativo, as duas raíses são uma positiva e outra negativa.

Como a soma é negativa, segue-se que a maior em valor absoluto é negativa.

191. **Generalização.** — *Discutir* a priori *os sinais das raises de uma equação do segundo gráu.*

Temos dois casos : $c>0$ ou $c<0$.

1.º **Caso.** $c>0$. — Forma-se o realizante b^2-4ac; se fôr negativo, as raises são imaginárias e acaba-se a discussão.

Se o realizante fôr positivo, as raises são reais, e como o produto delas $\frac{c}{a}$ é positivo (lembra-se que a é sempre positivo, nº 174, observação), têm ambas o mesmo sinal.

Se b fôr positivo, a soma delas $x'+x''=-\frac{b}{a}$ é negativa, e segue-se que ambas são negativas.

Se b fôr negativo, a soma delas $x'+x''=\frac{-b}{a}$ é positiva, e portanto ambas são positivas.

2.º **Caso.** $c<0$. — Neste caso, é inutil formar o realizante, que é sempre positivo. As raises são sempre reais.

Como o produto delas $\frac{c}{a}$ é negativo, elas têm sinais contrários.

Se b fôr positivo, a soma delas $x'+x''=\frac{-b}{a}$ é negativa, e a maior em valor absoluto é negativa.

Se b fôr negativo, a soma delas $x'+x''=\frac{-b}{a}$ é positiva, e a maior em valor absoluto é positiva.

RESUMO DA DISCUSSÃO

$c>0$	$b^2-4ac<0$	Duas raises imaginárias.
	$b^2-4ac>0$	$b>0$: Duas raises reais e negativas.
		$b<0$: Duas raises reais e positivas.
$c<0$	b^2-4ac é sempre positivo e as raises reais.	$b>0$: Duas raises reais, de sinais contrarios, a maior em valor absoluto é negativa.
		$b<0$: Duas raises reais, de sinais contrários, a maior em valor absoluto é positiva.

192. — *Decompôr em factores o primeiro membro de cada uma das equações seguintes :*

$$1^o \quad 64x^2-8x-2=0,$$
$$2^o \quad x^2-10x+21=0.$$

1º Calculemos as raises da primeira equação ; estas raises são :

$$x'=\frac{1}{4} \qquad x''=-\frac{1}{8}.$$

Conforme o teorema (187), temos

$$64x^2-8x-2=64(x-x')(x-x'')=64\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right).$$

ou

$$64x^2-8x-2=(8x-2)(8x+1).$$

2º As raises da segunda equação, são 3 e 7, e temos

$$x^2-10x+21=(x-3)(x-7).$$

193. — *Formar as equações cujas raises são :*

$$1^o \quad 5 \text{ e } 7 \ ; \quad 2^o \quad 2 \text{ e } \frac{3}{5}; \quad 3^o \quad 4 \text{ e } -\frac{5}{6}.$$

1º A soma das raises é $5+7=12$, e o produto é $5.7=35$; a equação procurada é (184-185):

$$x^2-12x+35=0.$$

2º A soma e o produto das raises são $\frac{13}{5}$ e $\frac{6}{5}$; a equação procurada é

$$x^2-\frac{13}{5}x+\frac{6}{5}=0 \quad \text{ou} \quad 5x^2-13x+6=0.$$

3º Podemos formar a terceira equação como as duas precedentes. Podemos tambem utilizar o teorema (187).

Temos:

$$a(x-x')(x-x'')=(x-4)\left(x+\frac{5}{6}\right)=x^2-\frac{19x}{6}-\frac{10}{3}=0,$$

ou ainda

$$6x^2-19x-20=0.$$

194. — *Achar uma equação de raises inversas das raizes da equação*

$$ax^2+bx+c=0.$$

Se x' e x'' fôrem as raises da equação dada, e se y' e y'' fôrem as da equação procurada, teremos:

$$y'=\frac{1}{x'} \quad \text{e} \quad y''=\frac{1}{x''}.$$

Donde se deduz:

$$y'+y''=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{x'+x''}{x'x''},$$

e

$$y'\times y''=\frac{1}{x'}\times\frac{1}{x''}=\frac{1}{x'x''}.$$

Mas, na equação dada, temos (184-185):

$$x'+x''=-b/a \quad \text{e} \quad x'x''=c/a.$$

As igualdades precedentes vêm a ser:

$$y'+y''=\frac{x'+x''}{x'x''}=\frac{-b/a}{c/a}=-\frac{b}{c}$$

$$y'y''=\frac{1}{x'x''}=\frac{1}{c/a}=\frac{a}{c}.$$

A equação procurada é pois:

$$y^2+\frac{b}{c}y+\frac{a}{c}=0 \quad \text{ou} \quad cy^2+by+a=0.$$

195. — *Achar as condições para que duas equações do segundo gráu tenham as mesmas raises.*

Sejam as equações

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{e} \quad a'x^2+b'x+c'=0$$

cujas raises são x' e x''. Cada equação fornece $x'+x''$ e $x'x''$. Temos, pois:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=-\frac{b'}{a'} \quad \text{e} \quad x'x''=\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}.$$

Donde se tira

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{b'}=\frac{a}{a'};$$

e

$$\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{c'}=\frac{a}{a'}.$$

Temos portanto

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

São as condições procuradas.

III. Discussão da formula do segundo gráu.

196. — Discutir a formula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (1)$$

é achar o sinal de cada uma das raises da equação

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (2)$$

e as condições de realidade destas raises conforme os valores e os sinais de a, b e c.

Lembra-se que a é sempre positivo (nº 174, observação).

197. — Distinguiremos tres casos, conforme o realizante fô superior, igual ou inferior a zero.

198. — **Primeiro caso.** $b^2-4ac>0$. As raises, neste caso, são reais e desiguais.

E no mesmo tempo que $b^2-4ac>0$ podemos ter $c>0$, $c<0$ e $c=0$.

199. — 1º $c>0$. Quando c é positivo, a quantidade $-4ac$ é negativa e o valor absoluto do radical $\sqrt{b^2-4ac}$ é menor do que b; portanto, o numerador das raises, $-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$ terá o sinal de $-b$. As raises são pois ambas negativas se b fôr positivo na equação, e ambas positivas se b fôr negativo.

200. — 2º $c<0$. Quando c é negativo, a quantidade $-4ac$ é positiva, e o valor absoluto do radical $\sqrt{b^2-4ac}$ é maior do que b; portanto, o numerador das raises, $-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$, terá o sinal do radical. As raises são pois de sinais contrários e a maior em valor absoluto tem um sinal contrario ao de b na equação.

201. — 3º $c=0$. Quando $c=0$, o radical vem a ser $\sqrt{b^2}$ ou b, e a equação (2) dá: $x=\frac{-b\pm b}{2a}$; uma raís vale $\frac{-b}{a}$, e a outra é nula.

Quando $c=0$, a equação (1) se reduz a $ax^2+bx=0$, equação incompleta já resolvida, nº 176.

202. — **Segundo caso.** $b^2-4ac=0$. — As raises são reais e iguais neste caso.

$$x=\frac{-b\pm0}{2a}=\frac{-b}{2a}.$$

As raizes são iguais e têm o sinal contrario de b.

203. — **Terceiro caso.** $b^2-4ac<0$. As raises, neste caso, são imaginárias.

204. — Podemos pôr as raises imaginárias debaixo da forma

$$x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}.$$

Com efeito, temos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{(4ac-b^2)(-1)}}{2a}$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\sqrt{-1}$$

Façamos:

$$\alpha=\frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad \beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a},$$

teremos

$$x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1},$$

ou

$$x'=\alpha+\beta\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad x''=\alpha-\beta\sqrt{-1}.$$

Casos particulares.

205. **Teorema.** — *A equação* $ax^2+bx+c=0$, *tem uma raís infinita quando* $a=0$; *tem duas raises infinitas se* $a=b=0$; *emfim tem uma infinidade de raises se* $a=b=c=0$.

Para o demonstrar, façamos

$$x=\frac{1}{y}.$$

Nesta igualdade vê-se que se x fôr nulo, y é infinito, porque o quociente de 1 por y não se póde anular senão quando o divisor y é infinito; do mesmo modo, se x fôr infinito, y é nulo, porque o quociente de 1 por y não póde ser infinito se o divisor não fôr infinitamente pequeno ou nulo. Portanto, concluimos que a um valor nulo de y corresponde um valor infinito de x e reciprocamente.

Substituindo-se x por $\frac{1}{y}$ na equação geral, ela vem a ser

$$\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c=0 \quad \text{ou} \quad cy^2+by+a=0.$$

Temos assim as duas equações correlativas:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{e} \quad cy^2+by+a=0.$$

1º Quando $a=0$, a equação em y tem uma raís nula (201): a equação em x tem, pois, uma raís infinita.

2º Si $a=b=0$, a equação em y se reduz a $cy^2=0$ e suas duas raises são nulas; portanto, a equação em x tem 2 raises infinitas.

3º Quando $a=b=c=0$, a equação geral se torna

$$0.x^2+0.x+0=0.$$

Vê-se que esta ultima fica satisfeita seja qual fôr o valor dado a x. A equação do segundo gráu tem pois uma infinidade de raises quando $a=b=c=0$.

206. — Quadro resumindo a discussão.

- $a>0$
  - $b^2-4ac>0$ Duas raises reais e desiguais.
    - $c>0$
      - $b>0$: Duas raises reais, desiguais e negativas.
      - $b<0$: Duas raises reais, desiguais e positivas.
    - $c<0$: Duas raises de sinais contrários; a maior em val. absol. tem sinal diferente de b.
    - $c=0$: Uma rais é 0; outra é $\frac{-b}{a}$.
  - $b^2-4ac=0$ Duas raises reais e iguais. $x'=x''=\frac{-b}{2a}$
  - $b^2-4ac<0$ Duas raises imaginárias. $x'=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $x''=\alpha-\beta\sqrt{-1}$
- $a=0$
  - $b \gtrless 0$, $c \gtrless 0$: x' é infinita e x'' real e finita.
  - $b=0$, $c \gtrless 0$: Duas raises infinitas.
  - $b=0$, $c=0$: Uma infinidade de raises.

EXERCICIOS SOBRE AS PROPRIEDADES DAS RAISES

Dar a soma, o produto e a diferença das raises de cada uma das equações seguintes :

1356. $x^2-9x+8=0$
1357. $x^2-9x+20=0$
1358. $x^2-x-1=0$
1359. $x^2+16x+64=0$
1360. $7x^2+2x+11=0$
1361. $x^2-4x+4=0$
1362. $x^2-4x+5=0$
1363. $18a^2x^2+9a^2x+1=0$
1364. $11x^2-121x=0$
1365. $64x^2-1=0$
1366. $20x^2-401x+20=0$
1367. $x^2-11ax+30a^2=0$

Sem resolver as equações seguintes, dizer *a priori* os sinais das raises :

1368. $x^2-23x+60=0$
1369. $x^2-17x-60=0$
1370. $x^2+23x+60=0$
1371. $x^2+17x-60=0$
1372. $x^2-30x+200=0$
1373. $x^2-0,3x+0,04=0$
1374. $x^2+100x+900=0$
1375. $x^2+(b^2-a^2)x-a^2b^2=0$

Decompôr em factores o primeiro membro de cada uma das equações seguintes :

1376. $x^2-7x+12=0$
1377. $x^2-2x-120=0$
1378. $x^2+10x+9=0$
1379. $3x^2-10x+3=0$
1380. $x^2-50x-51=0$
1381. $81x^2-189x+110=0$
1382. $x^2-1=0$
1383. $x^2-16x=0$
1384. $x^2-(a+1)x+a=0$
1385. $10x^2-101x+10=0$

Formar as equações que têm por raises os numeros seguintes:

1386. 3, 5
1387. 10, -1
1388. -40, -40
1389. m, $2m$
1390. a, $1/a$
1391. a, $-a$
1392. $a+b$, $a-b$
1393. $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a-b}$.
1394. $\frac{1}{7}$, 7.
1395. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$.
1396. $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$.
1397. a, $-an$

Na equação $x^2-ax+3600=0$, qual deve ser o valor de a para que tenhamos :

1398. $x'=20$
1399. $x'=30$
1400. x' e x'' imaginarias
1401. $x'=x''$
1402. $x'=2x''$
1403. $x'=-x''$
1404. $x'=1/x''$
1405. $x'+x''=100$
1406. $x'=x''/2$
1407. $x'=1$
1408. $x'=x''+5$
1409. $1/x'+1/x''=1$

Na equação $x^2-16x+c=0$ determinar c de modo que tenhamos :

1410. $x'=x''$
1411. $x'=7x''$
1412. $x'=1/x''$
1413. $x'-x''=2$
1414. $x'^2+x''^2=136$
1415. $x'^2-x''^2=160$
1416. $x'=1$
1417. $x''=100$
1418. $x'=-x''/2$
1419. x' e x'' imaginarias
1420. $x'=x''+1$
1421. $1/x'+1/x''=10$

Determinar a e b de modo que cada par de equações seguintes tenha mesmas raises :

1422. $x^2-23x+60=0$ $x^2-ax+b=0$
1423. $3x^2-10x+3=0$ $ax^2+bx+6=0$
1424. $ax^2-41x+40=0$ $x^2+bx+80=0$

CAPITULO IV

SISTEMAS DE EQUAÇÕES E PROBLEMAS DO SEGUNDO GRÁU

I. Resolução de alguns sistemas.

207. — *Resolver o sistema* $x+y=32$, $xy=231$.
Da primeira equação, tira-se

$$y=32-x.$$

Levando este valor para a segunda equação, ela vem a ser

$$x(32-x)=231 \quad \text{ou} \quad x^2-32x+231=0,$$

e tem por raises

$$x'=21 \quad \text{e} \quad x''=11.$$

Os valores de y serão :

$$y'=32-x'=32-21=11,$$
$$y''=32-x''=32-11=21.$$

As soluções do sistema são, pois :

$$1^o\ x=21,\ y=11; \quad 2^o\ x=11 \quad \text{e} \quad y=21.$$

208. — *Resolver o systema* $x^2+y^2=113$, $xy=56$.
Se á primeira equação acrescentarmos duas vezes a segunda, teremos :

$$x^2+y^2+2xy=113+56.2 \quad \text{ou} \quad (x+y)^2=225.$$

Dondo se tira

$$x+y=\pm 15,$$

e portanto

$$x+y=15\ (1); \qquad x+y=-15\ (2).$$

Subtraindo da primeira equação dada duas vezes a segunda, vem tambem :

$$x^2+y^2-2xy=113-56.2 \quad \text{ou} \quad (x-y)^2=1.$$

Donde se deduz

$$x-y=\pm 1,$$

e portanto

$$x-y=1\ (3); \qquad x-y=-1\ (4).$$

Somando e subtraindo,

$$(1) \text{ e } (3) \text{ dão } x=8, \qquad y=7;$$
$$(1) \text{ e } (4) \text{ dão } x=7, \qquad y=8;$$
$$(2) \text{ e } (3) \text{ dão } x=-7, \qquad y=-8;$$
$$(2) \text{ e } (4) \text{ dão } x=-8, \qquad y=-7.$$

O sistema proposto tem as quatro soluções :

$$1^o\ x=8\ y=7; \qquad 3^o\ x=-8,\ y=-7;$$
$$2^o\ x=7\ y=8; \qquad 4^o\ x=-7,\ y=-8.$$

209. — *Achar as soluções do sistema*

$$x+y=33, \qquad x^2+y^2=605.$$

O valor de y, tirado da primeira equação e levado para a segunda, dá a equação

$$2x^2-66x+484=0 \quad \text{ou} \quad x^2-33x+242=0,$$

cujas raises são :

$$x'=22 \quad \text{e} \quad x''=11.$$

Para estes dois valores de x, a primeira equação dá :

$$y=33-x'=33-22=11,$$
$$y=33-x''=33-11=22.$$

As soluções procuradas são :

$$1^o\ x=22,\ y=11; \qquad 2^o\ x=11,\ y=22.$$

210. *Resolver o sistema*

$$x^2-y^2=48, \qquad x+y=24.$$

Dividindo-se a primeira equação pela segunda, vem

$$\frac{x^2-y^2}{x+y}=\frac{48}{24} \quad \text{ou} \quad x-y=2.$$

As duas equações

$$x+y=24 \quad \text{e} \quad x-y=2,$$

dão

$$x=13 \quad \text{e} \quad y=11.$$

211. — *Achar as soluções do sistema*

$$x^2-y^2=a^2, \qquad x=by.$$

Levando o valor de x para a primeira equação, ela vem a ser

$$(by)^2-y^2=a^2 \quad \text{ou} \quad y^2=\frac{a^2}{b^2-1}.$$

Donde se tira

$$y=\pm\frac{a}{\sqrt{b^2-1}},$$

e portanto

$$x=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-1}}.$$

As soluções do sistema proposto são pois :

$$1^o\ x=+\frac{ab}{\sqrt{b^2-1}},\qquad y=+\frac{a}{\sqrt{b^2-1}};$$

$$2^o\ x=-\frac{ab}{\sqrt{b^2-1}},\qquad y=+\frac{a}{\sqrt{b^2-1}};$$

$$3^o\ x=+\frac{ab}{\sqrt{b^2-1}},\qquad y=-\frac{a}{\sqrt{b^2-1}};$$

$$4^o\ x=-\frac{ab}{\sqrt{b^2-1}},\qquad y=-\frac{a}{\sqrt{b^2-1}}.$$

Observações. — 1.º A segunda equação podendo escrever-se

$$\frac{x}{y}=b,$$

vê-se que se b fôr positivo, x e y terão o mesmo sinal ; pelo contrário, x e y serão de sinais contrarios se b fôr negativo. No primeiro caso, o sistema tem duas soluções, 1.º e 4.º ; no segundo caso, tem as soluções 2.º e 3.º.

2.º É evidente que os valores achados são reais ou imaginários, conforme b^2-1 fôr superior ou inferior a 0.

II. Equações biquadradas.

212. — **Resolução da equação biquadrada.** — Equação *biquadrada* é a que contem a quarta e a segunda potência da incognita mais um termo conhecido. Tem a forma

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Para resolver esta equação façamos :

$$x^2=y \quad\text{donde}\quad x^4=y^2.$$

A equação biquadrada vem a ser

$$ay^2+by+c=0,$$

que tem as raises

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Substituindo y por x^2, teremos :

$$x^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\text{ou}\quad x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

e separando as raises,

$$1^o\ x'=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

$$2^o\ x''=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

$$3^o\ x'''=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

$$4^o\ x^{IV}=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Aplicação. — *Resolver a equação* $x^4-106x^2+2025=0$.

Substituindo nas 4 raises acima a por 1, b por -106 e c por 2025, teremos :

$$x'=+\sqrt{\frac{106+\sqrt{106^2-4.2025}}{2}}=9,$$

$$x''=-\sqrt{\frac{106+\sqrt{106^2-4.2025}}{2}}=-9,$$

$$x'''=+\sqrt{\frac{106-\sqrt{106^2-4.2025}}{2}}=5,$$

$$x^{IV}=-\sqrt{\frac{106-\sqrt{106^2-4.2025}}{2}}=-5.$$

213. **Teorema.** — *A equação biquadrada* $ax^4+bx^2+c=0$ *tem o primeiro membro divisivel sucessivamente por* $x-x'$, $x-x''$, $x-x'''$, $x-x^{IV}$.

Com efeito, o 1º membro anula-se pela substituição de x sucessivamente por x', x'', x''', x^{IV} (nº 59).

214. **Teorema.** — *O trinómio biquadrado* ax^4+bx^2+c *póde ser decomposto no produto*

$$a(x-x')(x-x'')(x-x''')(x-x^{IV}).$$

Com efeito, $x-x'$, $x-x''$, $x-x'''$, $x-x^{IV}$, dividindo ax^4+bx^2+c, podemos escrever :

$$ax^4+bx^2+c=(x-x')(x-x'')(x-x''')(x-x^{IV})Q\ ;$$

como os dois membros são do 4º gráu, segue-se que $Q=a$ identicamente. Temos pois :

$$ax^4+bx^2+c=a(x-x')(x-x'')(x-x''')(x-x^{iv}).$$

215. **Transformação das expressões da forma :** $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$.— Ás vezes é util transformar esta expressão de dois radicais sobrepostos numa soma ou diferença de dois radicais.

Façamos :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}. \qquad (1)$$

Elevemos ao quadrado, vem :

$$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

Esta equação decompõe-se nas duas seguintes (nº 172) :

$$x+y=a \quad \text{e} \quad \sqrt{b}=2\sqrt{xy} \quad \text{ou} \quad b=4xy;$$

donde

$$xy=\frac{b}{4};$$

x e y serão, pois, as raises da equação :

$$X^2-aX+\frac{b}{4}=0, \qquad (2)$$

que são

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-b}}{2};$$

x e y serão, pois, racionais se a^2-b fôr um quadrado perfeito.

A equação (2) resolve o problema da equação (1).

III. Equações trinómias da forma $ax^{2n}+bx^n+c=0$.

216. Pódem resolver-se as equações da forma

$$ax^{2n}+bx^n+c=0, \qquad (1)$$

onde n é qualquer inteiro, fazendo-se :

$$x^n=y. \qquad (2)$$

Substituindo x^n por y, a equação (1) transforma-se em

$$ay^2+by+c=0,$$

cujas raises são :

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

As raises da equação (1) são pois :

$$x=\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

IV. Equações irracionais.

217. — *Equação irracional* é a que contem a incógnita debaixo de um ou mais radicais.

Para se resolver uma equação irracional, é preciso desembaraçal-a dos radicais e resolver a equação resultante.

Para expelir um só radical é preciso isolá-lo no primeiro membro e elevar os dois membros á potência indicada pelo indice do radical.

Nem sempre se póde desembaraçar uma equação de seus radicais por elevação a potências ; muitas vezes, ao expelir um radical, aparecem novos. Por exemplo a equação :

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt[4]{b}+c$$

dá, quando se faz o cubo :

$$a=(\sqrt[4]{b}+c)^3=\sqrt[4]{b^3}+3c\sqrt[4]{b^2}+3c^2\sqrt[4]{b}+c^3.$$

Eis os casos mais ordinários em que o método se aplica :

1º *Ha um só radical quadrado.* — Isolando o radical, a equação terá a forma :

$$\sqrt{a}=b$$

Quadrando, teremos :

$$a=b^2,$$

equação racional que resolveremos se não exceder o 2º gráu. Depois, substituiremos as raises na equação proposta para rejeitar as raises extranhas.

2º *Ha 2 radicais quadrados.* — Isolando um radical, a equação terá a forma :

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}+c.$$

Quadrando, teremos :

$$a=b+2c\sqrt{b}+c^2,$$

equação de um só radical quadrado, que se resolve pelo 1º caso.

3º *Ha 3 radicais quadrados.* — Isolando 2 radicais, a equação terá a forma :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}+d.$$

Quadrando, teremos :

$$a+2\sqrt{ab}+b=c+2d\sqrt{c}+d^2,$$

equação de 2 radicais quadrados que se resolve pelo 2º caso.

4º *Ha 4 radicais quadrados sem termo racional.* — Isolando 2 radicais, teremos :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}+\sqrt{d}$$

Quadrando, vem :

$$a+2\sqrt{ab}+b=c+2\sqrt{cd}+d,$$

equação que se resolve pelo 2º caso.

5º *Ha um radical quadrado e outro de gráu superior.* — Isolando o radical de gráu superior, teremos :

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt{b}+c$$

Elevando ao cubo, vem :

$$a=b\sqrt{b}+3bc+3c^2\sqrt{b}+c^3,$$

ou

$$a=3bc+c^3+\sqrt{b}(b+3c^2),$$

equação que se resolve pelo 1º caso.

EXEMPLO I. — *Resolver a equação*

$$x+\sqrt{25-x^2}=7.$$

Isolando o radical temos :

$$\sqrt{25-x^2}=7-x.$$

Elevando ao quadrado vem :

$$25-x^2=49-14x+x^2,$$

ou

$$2x^2-14x+24=0$$

ou ainda :

$$x^2-7x+12=0.$$

As raises desta equação são :

$$x'=3,\ x''=4.$$

Ambas satisfazem á equação proposta.

EXEMPLO II. — *Resolver*

$$\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}.$$

Elevando ao quadrado, vem :

$$2+\sqrt{x-5}=13-x.$$

Isolando o radical, vem :

$$\sqrt{x-5}=11-x.$$

Elevando ao quadrado, temos :

$$x-5=121-22x+x^2,$$

ou, ordenando :

$$x^2-23x+126=0.$$

As raises desta equação são :

$$x'=9 \quad \text{e} \quad x''=14.$$

A raiz $x'=9$ satisfaz á equação dada e convem.

A raiz $x''=14$ não satisfaz á equação dada e não convem.

Observação. — A elevação ao quadrado póde introduzir raises extranhas ao problema ; deve-se, pois, resolvida uma equação irracional, substituir as raises na equação dada e rejeitar as que não satisfazem, conservando só as outras.

V. Resolução dos problemas do segundo gráu.

218. **Problema I.** — *Achar o número que, somado com seu quadrado, faça 2550.*

Sejam x e x^2 o numero e seu quadrado ; temos a equação

$$x+x^2=2\,550 \quad \text{ou} \quad x^2+x-2\,550=0.$$

As raises são :

$$x'=50 \quad \text{e} \quad x''=-51.$$

Estes dois numeros convêm ao problema.

219. **Problema II.** — *Qual é o número que, diminuido de sua raiz quadrada, se torna 3660?*

Sejam x^2 e x este numero e sua rais quadrada ; temos :

$$x^2-x=3\,660 \quad \text{ou} \quad x^2-x-3\,660=0.$$

As raises desta equação são :

$$x'=61 \quad \text{e} \quad x''=-60;$$

portanto, o numero procurado é $61^2=3\,721$.

A segunda solução convem tambem ao problema, porque temos :

$$60^2-(-60)=3\,660.$$

220. **Problema III.** — *Um relogio foi vendido por 75\$. Por quanto foi comprado, se o lucro em foi tanto por centro quanto custou o relogio?*

Seja x o preço de compra. O relogio vendeu-se por x\$, mais os x % de x, isto é $x+\dfrac{x^2}{100}$.

Temos, portanto :

$$x+\frac{x^2}{100}=75 \quad \text{ou} \quad x^2+100x-7\,500=0.$$

As raises desta equação são 50 e —150. Só a rais 50 convem ao problema.

O relogio custou, pois, 50$.

221. **Problema IV.** — *Quantos lados tem um poligono de 65 diagonais?*

Demonstra-se em geometria que um poligono convexo de n lados tem $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Temos, pois, a equação

$$\frac{n(n-3)}{2}=65 \quad \text{ou} \quad n^2-3n-130=0.$$

As raises são:

$$n'=13 \quad \text{e} \quad n''=-10.$$

A solução —10 não convem á questão. O poligono tem, pois, 13 lados.

222. **Problema V.** — *Dividir o número* a *em meia e extrema razão.*

Dividir a em meia e extrema razão, é dividir este numero em duas partes tais que o quadrado da primeira seja igual ao produto de a pela outra parte.

Sejam x e $a-x$, as duas partes; temos:

$$x^2=a(a-x) \quad \text{ou} \quad x^2+ax-a^2=0.$$

As raises desta equação são

$$x'=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1), \qquad x''=-\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1).$$

As outras partes são:

$$a-x'=a-\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)=\frac{a}{2}(3-\sqrt{5}),$$

e

$$a-x''=a-\left[-\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)\right]=\frac{a}{2}(3+\sqrt{5}).$$

As duas partes do numero são, pois:

$$1^\circ \quad \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{e} \quad \frac{a}{2}(3-\sqrt{5});$$

$$2^\circ \quad \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1) \quad \text{e} \quad \frac{a}{2}(3+\sqrt{5}).$$

223. **Problema VI.** — *Varias pessôas alugam um carro por 32$. No momento da saida duas estão ausentes; as outras estão obrigadas a dar cada uma $800 a mais. Quantas pessôas havia para alugar o carro?*

Seja x o numero dos passageiros e y o que paga cada um. Temos primeiro a equação:

$$xy=32. \qquad (1)$$

No momento da saida, o numero das pessôas é $x-2$, e cada uma paga $y+0,800$; temos pois:

$$(x-2)(y+0,8)=32,$$

ou

$$xy-2y+0,8x=33,6.$$

Substituindo nesta equação xy por seu valor 32 tirado de (1), temos após simplificação:

$$2x=5y+4. \qquad (2)$$

Da equação (2) tira-se: $x=\frac{5y+4}{2}$; este valor levado para a equação (1), dá:

$$5y^2+4y-64=0.$$

Esta equação tem a rais positiva 3,2. A equação (1) dá depois:

$$x=\frac{32}{y}=\frac{32}{3,2}=10.$$

Havia 10 pessôas.

224. **Problema VII.** — *Conhecendo o cateto* b *e a altura* h *caindo sobre a hipotenusa de um triangulo retangulo, calcular a hipotenusa* a *e o outro cateto* c.

Temos primeiro:

$$a^2=b^2+c^2. \qquad (1)$$

Ora, o triangulo tem por superficie $\frac{bc}{2}$ ou $\frac{ah}{2}$; a segunda equação é, pois:

$$bc=ah. \qquad (2)$$

Desta, tira-se

$$a=\frac{bc}{h}. \qquad (3)$$

A equação (1) torna-se:

$$\frac{b^2c^2}{h^2}=b^2+c^2 \quad \text{ou} \quad (b^2-h^2)c^2=b^2h^2.$$

Ela dá :

$$c=\frac{bh}{\sqrt{b^2-h^2}}.$$

A equação (3) fornece a ; temos, com efeito :

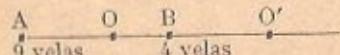
$$a=\frac{bc}{h}=\frac{b}{h}\times\frac{bh}{\sqrt{b^2-h^2}}=\frac{b^2}{\sqrt{b^2-h^2}}.$$

Os lados procurados são portanto :

$$c=\frac{bh}{\sqrt{b^2-h^2}} \quad \text{e} \quad a=\frac{b^2}{\sqrt{b^2-h^2}}.$$

225. **Problema VIII.** — *Achar um ponto igualmente alumiado numa reta AB de 6 m. unindo duas luzes, a primeira de 9 velas e a segunda de 4 velas.*

Sejam A e B as duas luzes e O o ponto procurado. Se x é a distancia de A ao ponto O, $6-x$ será a distancia de B ao mesmo ponto.

A O B O′
9 velas 4 velas

Sabemos que as iluminações estão inversamente proporcionais aos quadrados das distancias dos pontos alumiados ás fontes luminosas.

Se o ponto situado á 1 m. de distancia de A recebe uma iluminação igual a 9, o ponto O situado á distancia x receberá a iluminação $\frac{9}{x^2}$.

Do mesmo modo, um ponto O situado á distancia $6-x$ de B receberá a iluminação

$$\frac{4}{(6-x)^2}.$$

Como as duas iluminações devem ser iguais, temos a equação :

$$\frac{9}{x^2}=\frac{4}{(6-x)^2} \quad \text{ou} \quad 5x^2-108x+324=0,$$

cujas raises são

$$x'=3,6 \quad \text{e} \quad x''=18.$$

Temos assim dois pontos sobre a reta dada que satisfazem ás condições do problema : um, O, sobre a reta, a $3^m,60$ de A e a $2^m,40$ de B ; o outro, O′, sobre o prolongamento da reta do lado de B, a 18 metros de distancia de A e 12 metros de B.

EQUAÇÕES SIMULTANEAS E PROBLEMAS DO SEGUNDO GRÁU

Resolver os sistemas seguintes :

1425. $x+y=23$, $xy=132$

1426. $x-y=25$, $xy=150$

1427. $x^2+y^2=61$, $xy=30$

1428. $x^2+y^2=290$, $x+y=24$

1429. $x^2+y^2=1300$, $x-y=10$

1430. $x^2-y^2=64$, $xy=255$

1431. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=7$, $x-y=91$

1432. $x+y=11$, $\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=11$

1433. $x^2+y^2=74$, $7x=5y$

1434. $x^2+y^2=a^2$, $x^2-y^2=b^2$

1435. $x^2+y^2+xy=49$, $x+y=0$

1436. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{10}{81}$, $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{8}{81}$

1437. $x^3y^3=216$, $x^2y^2+x+y=41$

1438. $x^3-y^3=61$, $x-y=1$

1439. $x^4-y^4=65$, $x^2+y^2=13$

1440. $3x^2-2y^2=43$, $5x+3z=37$, $4x-5z=0$

1441. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{t}{d}$, $ax^2+by^2+cz^2+dt^2=k^2$

1442. $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{t}{6}$, $2x^2-3y^2+4z^2-t^2=34$

1443. $x^2+y^2=202$, $xy=99$, $x+y=z$

1444. $xy=az$, $xz=by$, $yz=cx$

Resolver as equações biquadradas seguintes e dar as quatro raises reais ou imaginarias :

1445. $x^4-26x^2+25=0$
1446. $x^4-20x^2+64=0$
1447. $x^4-1=0$
1448. $x^4-29x^2+100=0$
1449. $x^4-25x^2+144=0$
1450. $8x^4+20x^2-5,5=0$
1451. $36x^4-13x^2+1=0$
1452. $625x^4-125x^2+4=0$
1453. $x^4+13x^2+36=0$
1454. $4x^4-7x^2-261=0$
1455. $3x^4-7x^2+2=0$
1456. $6x^4+3x^2+1=0$
1457. $x^4-81=0$
1458. $x^4-16=0$
1459. $x^4+4x^2+4=0$
1460. $x^4-6x^2+9=0$
1461. $8x^4-6x^2+9=0$
1462. $x^4+4x^2=0$
1463. $x^4-9x^2=0$
1464. $6x^4-7x^2-3=0$

PROBLEMAS DO SEGUNDO GRÁU

1465. Achar dois números consecutivos cuja diferença dos quadrados seja 789.

1466. Achar dois números diferindo de 10 e cujos quadrados difiram de 260.

1467. Quais são os dois números cuja soma seja 34 e o produto 120 ?

1468. Achar dois números tendo 216 por produto e 6 por quociente.

1469. A diferença de dois números é 36 e o produto 765. Quais são esses numeros ?

1470. Comprou-se pano por 289$; o preço do metro em $ iguala o numero de metros comprados. Achar o valor do metro.

1471. Achar dois números cuja razão seja 3/4 e a diferença dos quadrados 6300.

1472. As idades de dois meninos são tais que o quociente do quadrado da 1.ª pela 2.ª é 3, e o quadrado da 2.ª dividido pela 1.ª dá 24 por quociente. Achar as duas idades.

1473. Achar dois números que estejam entre si como 4 está para 7 e cuja diferença dos quadrados seja 58500.

1474. Do quadrado da idade de uma pessôa, tirando-se 12 vezes esta idade, ficará 85. Qual é esta idade ?

1475. Achar dois números cujos produto seja 320 e o produto do maior pela diferença dêles seja 80.

1476. Um homem comprou um relogio e o tornou a vender por 24$. Por este preço lucra en $ tanto por cento quanto lhe custou o relogio. Achar o preço de compra.

1477. Qual é o número que, acrescentado á sua rais quadrada, faça 1332 ?

1478. Um açougueiro comprou carneiros e bois. Quantos comprou, sabendo que o numero dos carneiros excede de 50 o dos bois, e a soma dos dois números, multiplicada por sua diferença, faz 3500 ?

1479. Ganhando mais 4$, eu ganharia o quadrado do dinheiro que tenho ; ganhando 4$ menos, eu ganharia o dobro do meu dinheiro. Quanto tinha e quanto ganhei ?

1480. Um general dispõe um corpo de tropas em quadrado cheio. Depois de um primeiro arranjo, sobram-lhe 326 homens ; experimenta depois pôr mais 3 homens em cada linha, mas para completar o quadrado faltam-lhe 253 homens. Quantos homens tem ?

1481. Achar dois números tais que sua soma, sua diferença, e o produto de seus quadrados, sejam proporcionais a 17, 9, 2704.

1482. Um fazendeiro dizia : « Se vender meu café a 24 $ o saco, pagarei minhas dividas e terei 150$ de sobra ; mas se o vender sómente 18$ o saco, serei obrigado a pedir emprestados 200$. Quanto devo, e quantos sacos tenho ? »

1483. Dois capitais cuja soma é 60:000$, rendem, o 1.º 1:800$ e o 2.º 1:000$ de juros annais. A soma das taxas é 9,5. Achar os dois capitais e as duas taxas.

1484. Dois capitais diferem de 5:000$, e suas taxas diferem de 1$. Sabendo que os juros anuais são 1:000$ para o 1.º é 600$ para o outro, achar os capitais e as taxas.

1485. Uma sociedade de 24 pessôas gastou 68 $ numa festa : os homens 40$, e as senhoras 28$. Cada homem gastou 2$ mais do que uma senhora. Quantos homens e quantas senhoras havia, e quanto gastou cada pessôa ?

1486. Um carniceiro compra carneiros por 200$; perde 2 carneiros e fica obrigado a vender cada um dos outros 15$ mais do que lhe custára. Lucra assim 80$ ao todo. Quanto lhe custou um carneiro e quantos comprou ?

1487. Achar tres números consecutivos tais que seu produto valha 8 vezes sua soma.

1488. Achar a base de um sistema de numeração no qual o número decimal 456 se escreve 556.

1489. Duas fontes enchem um tanque em 6 horas. Achar o tempo necessario a cada uma para encher o tanque, se a 1.ª leva 5 horas mais do que a 2.ª.

PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA

1490. Um poligono tem 90 diagonais ; quantos lados tem ?

1491. Num triângulo, um ângulo vale 70º ; achar os dois outros ângulos, sabendo que um é o quadrado do outro.

1492. Dividir uma reta de 100 met. em meia e extrema razão.

1493. O maior segmento de uma reta dividida em meia e extrema razão é *a* ; achar a reta.

1494. O menor segmento de uma reta dividida em meia e extrema razão, tem 10 met. ; achar a reta.

1495. Em um triângulo ABC, traça-se a bissetriz BD do ângulo B. O lado BC do triângulo iguala 2 vezes o segmento AD mais 5 metros ; calcular o lado BC, sabendo que DC = 2 met. e AB = 9 m.

1496. Calcular a superficie e os dois catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é 125 m., se os catetos têm 25 m. de diferença.

1497. Num triângulo retângulo, a hipotenusa vale 40 m. Calcular os catetos, se a soma dêles vale 56 m.

1498. Achar um triângulo retângulo cujos lados sejam tres números inteiros consecutivos.

1499. Qual é o triângulo retângulo cujos lados diferem de 10 m. ?

1500. Num triângulo retângulo, o perimetro vale 60 m., e o menor lado tem 16 m. menos do que a hipotenusa. Achar os tres lados.

1501. Calcular os dois catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é 100 m. e a superficie 2400 m².

1502. Duas cordas cortam-se num circulo : os dois segmentos de uma são 10 m. e 20 m. Quais são os dois segmentos da outra corda, cujo comprimento total é 30 m. ?

1503. Duas cordas cortam-se no interior de um circulo de 6 m. de raio. Se o produto dos segmentos de uma é 11, calcular a distância do centro ao ponto de interseção.

1504. Por um ponto traçam-se a um circulo uma tangente e uma secante. A tangente tem 6 m., e a parte interior da secante, 5 m. Achar a secante inteira.

1505. Num circulo de 13 m. de raio, traça-se um diâmetro. Em que ponto deste diâmetro se deve traçar uma perpendicular para que a parte desta reta compreendida no circulo tenha 10 m. ?

1506. Dividir um circulo de 20 m. de raio em duas partes equivalentes por um circulo concêntrico.

1507. Dividir um circulo de 20 m. de raio em meia e extrema razão por um circulo concêntrico.

1508. Achar as duas dimensões de um retângulo de 10.302 m² de superficie e 1 m. de diferença entre as dimensões.

1509. Aumentando-se de 1 m. as duas dimensões de um retângulo, a superficie aumenta de 31 m². Achar essas dimensões sabendo que diferem de 10 m.

1510. Um retângulo tem 300 m² de superficie, com uma diagonal de 25 m. Quais são os lados ?

1511. A diagonal e o lado de um quadrado têm 9 m. 656 de diferença. Achar a superficie do quadrado.

1512. A diferença entre a superficie de um quadrado e a superficie do quadrado construido sobre a diagonal é 2 m². Achar o lado e a diagonal desse quadrado.

1513. Num triângulo ABC, temos AB=10 m., BC=15 m. Calcular AC sabendo que, tomando sobre AB um comprimento AD=AC, a paralela DE a AC iguala 1 m. 60.

1514. Sabendo que a superficie de um triângulo é 300 m² e a base e a altura diferem de 10 m., achar essas duas linhas.

1515. Calcular as medianas de um triângulo cujos lados são 5 m., 12 m. e 13 m.

1516. Dois triângulos, um duplo do outro, têm um mesmo ângulo 40°. No primeiro triângulo os dois lados que compreendem o ângulo de 40° valem respetivamente 23 m. 10 et 20 m. Calcular os dois lados do 2.° triângulo que compreendem o angulo de 40°, sabendo que diferem de 1 m.

1517. Num trapézio, a grande base excede a pequena de 10 m., e a altura iguala a semi-soma das bases ; calcular essas tres linhas, se a superficie do trapézio é 225 m².

PROBLEMAS DE GEOMETRIA NO ESPAÇO

1518. As dimensões de uma viga estão entre si como os números 3, 4, 50. Calcular as dimensões e o volume desta viga, se a superficie total é 7 m² 24.

1519. As 3 arestas de um paralelipipedo retângulo são tres números inteiros consecutivos, e a diagonal vale 7 m. 071 ; achar as tres arestas e o volume.

1520. Um prisma hexagonal regular tem 0 m. 80 de altura e 0 m² 83136 de superficie total. Calcular o lado da base.

1521. Uma pirâmide tem 10 dm² de base e 2 m. de altura. A que distância da base se lhe deve traçar um plano paralelo para que a seção seja 1/5 da base.

1522. Um tronco de pirâmide de bases quadradas, tem 21 dm³ de volume ; o lado da grande base tem 40 cm. e a altura 30 cm. ; calcular o lado da base superior.

1523. Um vaso cilindrico tem um volume de 2π e uma superficie lateral de 4π. Achar o raio e a altura deste vaso.

1524. Achar o raio de um cilindro que tem 2 m. de altura e 6 m² de superficie total.

1525. O diâmetro e a altura de um cilindro estão entre si como 8 está para 5, e a superficie total vale 226 m² 19448. Qual é o raio e a altura deste solido ?

1526. O raio de um cone tem 2 m. menos do que a geratriz. Calcular o raio e a altura, se a superficie convexa do cone é 9 m² 42477.

1527. Faz-se girar um retângulo ao redor de um dos lados que tem 1 m. Qual deve ser o comprimento do outro lado para que o volume gerado seja 31 dm³ 41593 ?

1528. A superficie total de um cone vale 63 m² 617197 e a geratriz tem 7 m. 50 ; achar a altura e o raio deste solido.

1529. Faz-se girar um triângulo retângulo ao redor de um cateto que tem 2 m. de comprimento. Qual deve ser o comprimento do outro cateto para que o volume gerado seja 4 m³ 71238 ?

1530. Uma caldeira é formada de um cilindro terminado por dois hemisférios de mesmo raio que o cilindro. A razão do comprimento do cilindro para o raio é 4. Determinar o comprimento interior total desta caldeira, que deve conter 15 hectolitros.

CAPITULO V

TEORIA ELEMENTAR DO TRINÓMIO DO SEGUNDO GRÁU

I. Propriedades do trinómio.

226. Definições. — *Trinómio* do segundo gráu é a expressão

$$ax^2+bx+c.$$

As *raises* deste trinómio são as da equação que se obtem igualando este polinómio a zero. São, pois, as raises da equação :

$$ax^2+bx+c=0.$$

No trinómio, a póde ser positivo ou negativo, e x póde tomar *todos os valores possiveis ;* por isso, a letra x chama-se *variavel independente.*

O trinómio é, pois, uma *função de x*, visto que seu valor depende de x (n.º 82).

227. Teorema. — *O trinómio* ax^2+bx+c, *quando as raises fôrem reais e desiguais, é o produto de a pela diferença de dois quadrados.*

Façamos :

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Como temos :

$$\frac{b}{a}=-(x'+x'') \quad \text{e} \quad \frac{c}{a}=x'x'',$$

a equação precedente torna-se :

$$y=a[x^2-(x'+x'')x+x'x''].$$

Por dentro dos paréntesis quebrados, acrescentando a quantidada nula :

$$\left(\frac{x'+x''}{2}\right)^2-\left(\frac{x'+x''}{2}\right)^2,$$

teremos :

$$y=a\left[x^2-x(x'+x'')+\left(\frac{x'+x''}{2}\right)^2+x'x''-\left(\frac{x'+x''}{2}\right)^2\right].$$

Mas observando que podemos escrever :

$$1^\circ \quad x^2-x(x'+x'')+\left(\frac{x'+x''}{2}\right)^2=\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right)^2$$

$$2^\circ \quad x'x''-\left(\frac{x'+x''}{2}\right)^2=\frac{4x'x''-x'^2-2x'x''-x''^2}{4}$$

$$=-\left(\frac{x'-x''}{2}\right),$$

o valor de y vem a ser :

$$y=a\left[\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right)^2-\left(\frac{x'-x''}{2}\right)^2\right]. \qquad (1)$$

Aplicação. — *Decompôr numa diferença de dois quadrados o trinómio :*

$$y=x^2-9x+20.$$

As raises deste trinomio são 5 e 4 ; temos :

$$\frac{x'+x''}{2}=\frac{9}{2} \quad \text{e} \quad \frac{x'-x''}{2}=\frac{1}{2}.$$

Portanto, a formula (1) vem a ser

$$y=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

228. Teorema. — *Um trinómio de raises iguais é o produto de a por um quadrado perfeito.*

Se o trinómio tiver raises iguais, temos :

$$\frac{b}{a}=-2x' \quad \text{e} \quad \frac{c}{a}=x'^2.$$

Portanto :

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x^2-2xx'+x'^2)=a(x-x')^2.$$

Aplicação. — *Decompôr o trinómio* $-25x^2+10x-1$, *cujas raises são iguais.*

A rais dupla é $\frac{1}{5}$; temos :

$$-25x^2+10x-1=-25\left(x-\frac{1}{5}\right)^2=-(5x-1)^2.$$

229. **Teorema.** — *Um trinómio de raises imaginárias é o produto de a pela soma de dois quadrados.*

Se as raises fôrem imaginárias, o realizante b^2-4ac é negativo. Portanto, temos :

$$b^2-4ac<0 \quad \text{ou} \quad \frac{b^2}{a^2}-\frac{4ac}{a^2}<0.$$

Esta ultima desigualdade reduz-se a :

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}<0 \quad \text{ou a} \quad (x'+x'')^2-4x'x''<0.$$

Emfim, desenvolvendo, vem :

$$(x'-x'')^2<0 \quad \text{ou ainda} \quad -(x'-x'')^2>0. \qquad (1)$$

Ora, o trinómio podendo escrever-se : (formula (1) nº 227),

$$y=a\left[\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right)^2-\left(\frac{x'-x''}{2}\right)^2\right] \qquad (2)$$

vê-se que o segundo quadrado $-\left(\frac{x'-x''}{2}\right)^2$ é positivo ; por conseguinte, o teorema fica demonstrado.

Aplicação. — *Decompôr o trinómio* $4x^2-9x+6,625$ *numa soma de dois quadrados.*

Aplicando a formula (2) teremos sucessivamente :

$$x'+x''=\frac{9}{4} \quad \text{e} \quad x'-x''=\frac{10\sqrt{-1}}{8},$$

ou

$$\frac{x'+x''}{2}=\frac{9}{8} \quad \text{e} \quad \frac{x'-x''}{2}=\frac{5\sqrt{-1}}{8}.$$

Portanto

$$4x^2-9x+6,625=4\left[\left(x-\frac{9}{8}\right)^2-\left(\frac{5\sqrt{-1}}{8}\right)^2\right]=4\left[\left(x-\frac{9}{8}\right)^2+\frac{25}{64}\right].$$

230. **Teorema.** — *Todo trinómio do segundo gráu póde-se decompôr num produto de factores do 1.º gráu.*

1ª *Demonstração.* — A do numero 187.

2ª *Demonstração.* — Temos :

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a[x^2-(x'+x'')x+x'x''],$$

ou ainda :

$$y=a(x-x')(x-x'').$$

Aplicações. — 1.º *Decompôr em factores o trinómio*

$$y=x^2-16x+55.$$

As raises deste trinomio são 5 e 11 ; temos, portanto :

$$y=(x-5)(x-11).$$

2º *Decompôr o trinómio* $y=3x^2+11x-4$.

Como as raises são $\frac{1}{3}$ e -4, temos :

$$y=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+4)=(3x-1)(x+4).$$

3º *Simplificar a fração.*

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

Decompondo o numerador e o denominador em factores do primeiro gráu, temos :

$$y=\frac{a(x-x')(x-x'')}{a'(x-x_1)(x-x_2)}.$$

Se os dois trinómios tiverem uma raís comum, $x''=x_2$ por exemplo, y se reduzirá a :

$$\frac{a(x-x')}{a'(x-x_1)},$$

pois que $x-x''$ e $x-x_2$ serão então duas diferenças iguais.

Se os dois trinómios tivessem as mesmas raises, teriamos :

$$x'=x_1 \quad \text{e} \quad x''=x_2,$$

ou

$$x-x'=x-x_1 \quad \text{e} \quad x-x''=x-x_2,$$

e a fração se reduziria a $y=\frac{a}{a'}$.

4º *Simplificar a fração :*

$$y=\frac{x^2-9x+20}{x^2-12x+32}.$$

Temos :

$$x^2-9x+20=(x-4)(x-5),$$
$$x^2-12x+32=(x-4)(x-8).$$

Donde resulta que :

$$y=\frac{(x-4)(x-5)}{(x-4)(x-8)}=\frac{x-5}{x-8}.$$

5º *Formar um trinómio cujas raises sejam* a *e* b.

Façamos :

$$x=a \text{ e } x=b.$$

Donde se deduz :

$$x-a=0 \text{ e } x-b=0,$$

e portanto

$$(x-a)(x-b)=0,$$

ou

$$x^2-(a+b)x+ab=0.$$

O trinómio $x^2-(a+b)x+ab$ é o trinómio pedido, pois suas raizes são a e b.

6º *Formar o trinómio cujas raises são* 10 *e* 11.

O trinómio procurado é :

$$x^2-(10+11)x+10.11 \text{ ou } x^2-21x+110.$$

231. **Observações**. — As propriedades precedentes pertencem tambem aos trinómios incompletos.

1.º O binómio ax^2+c tem sempre raises iguais e de sinais contrários ; estas raises são, pois, ora reais e desiguais, ora imaginárias. No caso em que são reais, temos $x''=-x'$ na formula

$$y=a\left[\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right)^2-\left(\frac{x'-x''}{2}\right)^2\right],$$

que vem a ser :

$$y=a(x^2-x'^2).$$

Exemplo. — O binomio

$$4x^2-36=4(x^2-9),$$

porque

$$x'=3.$$

2º No caso em que as raises são imaginárias, temos

$$ax^2+b=a\left[x^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right].$$

3º O trinómio incompleto ax^2+bx tem sempre uma rais nula, $x''=0$.

$$y=a\left[\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right)^2-\left(\frac{x'-x''}{2}\right)^2\right],$$

Donde resulta que a formula vem a ser

$$y=a\left[\left(x-\frac{x'}{2}\right)^2-\left(\frac{x'}{2}\right)^2\right].$$

Exemplo. — O trinómio $5x^2-15x$ tem as raises 3 e 0. Temos, pois :

$$5x^2-15x=5\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right].$$

4º A decomposição em factores do primeiro gráu efetua-se como para os trinomios completos.

II. Variações do sinal do trinómio.

232. **Teorema**. — *O trinómio do segundo gráu tem sempre o sinal do primeiro têrmo, salvo para os valores de* x *compreendidos entre as raises, quando estas são reais e desiguais.*

Ha 3 casos possiveis, que vamos estudar um depois de outro.

1.º *O trinómio tem raises reais e desiguais.*

Temos :

$$y=ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'').$$

Admitamos $x'>x''$ e demos a x qualquer valor superior á maior rais, poderemos escrever :

$$x>x'>x'',$$

e, portanto :

$$x-x'>0 \quad \text{e} \quad x-x''>0.$$

O produto $(x-x')(x-x'')$ é, pois, positivo, e y tem o sinal de a.

Demos a x qualquer valor menor do que a menor rais ; teremos :

$$x<x'' \quad \text{e} \quad x<x',$$

e, portanto :

$$x-x''<0 \quad \text{e} \quad x-x'<0.$$

O produto $(x-x')(x-x'')$ é ainda positivo, e y tem, pois, o sinal de a.

Demos, emfim, a x um valor compreendido entre x' e x''; teremos :

$$x<x' \quad \text{e} \quad x>x'',$$

ou

$$x-x'<0 \quad \text{e} \quad x-x''>0.$$

O produto $(x-x')(x-x'')$ é, pois, negativo, e

$$y=a(x-x')(x-x''),$$

tem sinal contrário ao de a.

2º *O trinómio tem raises iguais.*

Se x' é a raís dupla, temos :

$$y=ax^2+bx+c=a(x-x')^2$$

Seja qual fôr o valor de x, o quadrado de $x-x'$ é sempre positivo e y tem sempre o sinal de a.

3.º *O trinómio tem raises imaginárias.*

O trinómio cujas raises são imaginárias é o produto de a pela soma de dois quadrados (n.º 229).

Esta soma é sempre positiva, e o trinómio tem sempre o sinal de a.

233. **Aplicações.** — 1.º *Achar os valores de* x *que tornam positivo ou negativo o trinómio* $-x^2+19x-88$.

As raises deste trinómio são 11 e 8 ; este trinómio terá o sinal de $-x^2$ para todos os valores de x superiores a 11 ou inferiores a 8.

Terá o sinal + para todos os valores de x compreendidos entre 11 e 8.

Portanto, qualquer número compreendido entre 11 e 8, 10 por exemplo, posto em lugar de x, dá ao trinómio o signal +.

Temos, com efeito :

$$-x^2+19x-88=-10^2+19.10-88=+2.$$

E todo o numero superior a 11 ou inferior a 8, por exemplo 20, dá ao trinómio um valor negativo.

Assim

$$-x^2+19x-88=-20^2+19.20-88=-108.$$

2º *Achar os valores de* x *que tornam positivo ou negativo o trinómio* $x^2-8x+16$.

Este trinómio tem raises iguais e escreve-se

$$x^2-8x+16=(x-4)^2.$$

Portanto, é sempre positivo, seja qual fôr o valor real dado a x.

3º *Poderá o trinómio* $-8x^2+28x-25$ *tomar um valor positivo?*

Pois que tem raizes imaginárias, este trinomio não póde tomar senão o sinal do seu primeiro termo ; por conseguinte, é sempre negativo.

4.º *Verificar se os numeros 10 e 2 estão exteriores ás raises do trinómio* $x^2-17x+60$ *ou estão compreendidos entre elas.*

Como o primeiro termo x^2 é positivo, o trinómio será positivo para todo valor de x não compreendido entre as raises. Então, para $x=10$, se o trinómio toma um valor positivo, é que 10 está exterior ás raizes.

Ora, para este valor de x, temos

$$x^2-17x+60=-10.$$

Portanto, 10 está compreendido entre as raizes.

Para $x=2$, temos :

$$x^2-17x+60=30.$$

O numero 2 está, pois, exterior ás raizes.

III. Resolução da desigualdade do segundo gráu.

234. **Casos a estudar.** — Resolver a desigualdade

$$ax^2+bx+c>0, \qquad (1)$$

é achar os valores de x que tornam positivo o trinómio :

$$ax^2+bx+c.$$

Distinguiremos tres casos principais ($R=b^2-4ac$) :

1º $R>0$; 2º $R=0$; 3º $R<0$.

Em cada caso, formaremos as hipóteses $a>0$ e $a<0$.

Temos, pois, que estudar os seis casos seguintes :

$$R>0\begin{cases}a>0,\\ a<0;\end{cases} \quad R=0\begin{cases}a>0,\\ a<0;\end{cases} \quad R<0\begin{cases}a>0,\\ a<0.\end{cases}$$

1.º **R>0, a>0.** — Como o realizante é positivo, as duas raizes do trinómio são reais ; seja x' a maior.

O trinómio terá o sinal de a, isto é positivo, para todos o valor de x exterior ás raizes. A desigualdade (1) será, pois, verificada para todo o valor de x superior a x' ou inferior a x''.

2.º **R>0 a<0.** — Para que o trinómio seja positivo, é preciso que tenha um sinal contrário ao de a ; não se póde, pois, verificar a desigualdade senão dando a x os valores compreendidos entre x' e x''.

3.º **R=0, a>0.** — Ja que tem raizes iguais, o trinómio tem sempre o sinal de a que é positivo (n.º 232, 2.º) ; o trinómio é, pois, sempre positivo : e, seja qual fôr x, temos :

$$ax^2+bx+c>0.$$

4º **R=0, a<0.** — O trinómio é sempre negativo, pois que tem sempre o sinal de a, que é negativo (nº 232, 2º). A desigualdade

$$ax^2+bx+c>0,$$

não se verifica para nenhum valor real de x, neste caso.

5.º e 6.º **R<0.** — Como tem raizes imaginárias, o trinómio terá sempre o sinal de a (n.º 232, 3.º); portanto, será sempre positivo, se a fôr positivo, e sempre negativo se a fôr negativo. Assim, a desigualdade

$$ax^2+bx+c>0,$$

nestes dois casos, verifica-se para todo valor de x, se $a>0$; não se verifica para nenhum valor de x, se $a<0$.

235. **Aplicações.** — 1.º *Achar os valores de* x *que verificam a desigualdade*

$$x^2-11x+30>0.$$

Neste exemplo, $a=1$, é positivo, e as raizes são reais e desiguais; são

$$x'=6, \quad x''=5.$$

Todo o valor de x superior a 6, ou inferior a 5, tornará o trinómio positivo, e a desigualdade será verificada.

2º *Verificar a desigualdade* $-5x^2+51x-10>0$.

As raizes do trinómio $-5x^2+51x-10$ são $x'=10$ e $x''=\frac{1}{5}$.

Para que este trinomio tenha um sinal contrário ao de -5, é preciso dar a x os valores compreendidos entre 10 e $\frac{1}{5}$.

3º *Verificar a desigualdade* $x^2-40x+400<0$.

Como tem raizes iguais, o trinómio terá sempre o sinal de x^2, e a desigualdade nunca se verificará.

4º *Verificar a desigualdade* $-5x^2+12x-100<0$.

Como tem raizes imaginárias, o trinómio tem sempre o sinal de $-5x^2$; a desigualdade é, pois, verificada seja qual fôr x.

5º *Achar os valores de* x *que verificam ao mesmo tempo as duas desigualdades.*

$$x^2-13x+36>0,$$
$$-x^2+14x-24>0.$$

As raizes do primeiro trinómio são 4 e 9, e as do segundo são 2 e 12.

Os valores de x que verificam a primeira desigualdade, são os numeros superiores a 9 ou inferiores a 4.

Os valores de x que verificam a segunda desigualdade, são os numeros compreendidos entre 2 e 12.

Portanto, colocando as raizes por ordem de grandeza crescente:

$$2, \quad 4, \quad 9, \quad 12,$$

vê-se que os valores de x que verificam ao mesmo tempo as duas desigualdades, são os numeros compreendidos entre 2 e 4, e os compreendidos entre 9 e 12.

EXERCICIOS SOBRE O TRINÓMIO DO SEGUNDO GRÁU

Achar as raizes, decompôr numa diferença de dois quadrados, num produto de dois factores do primeiro gráu, cada um dos trinómios seguintes:

1531. x^2-7x+1
1532. $x^2-2x-15$
1533. x^2+3x+2
1534. $-x^2+x+2$
1535. $x^2-60x+459$
1536. $x^2+21x-820$
1537. $-x^2+35x-300$
1538. $-x^2+85x-400$
1539. $6x^2-13x+6$
1540. $-16x^2+16x-3$
1541. $-abx^2+(a^2+b^2)x-ab$
1542. $-5x^2+125$

Achar as raizes dos trinómios seguintes, e substituir cada um por um quadrado ou pela soma de dois quadrados:

1543. $16x^2-8x+1$
1544. $x^2-9x+20{,}25$
1545. $4x^2-4x+1$
1546. x^2-6x+5
1547. $-x^2+8x-16$
1548. $-x^2-16x-65$
1549. $x^2-x+0{,}25$
1550. $-x^2-0{,}06x-0{,}0009$
1551. $x^2-2ax+a^2+b^2$
1552. $-a^2x^2+14ax-49$
1553. x^2+16
1554. $-x^2+ax$
1555. $-x^2-16$
1556. x^2+1

Achar as raizes dos trinómios seguintes e decompô-los em quadrados e em factores do primeiro gráu:

1557. $x^2-100x+99$
1558. $x^2-20x+101$
1559. $1089x^2-66x+1$
1560. $-x^2+41x-40$
1561. $-x^2+42x-442$
1562. $-a^2x^2+2abx-b^2$
1563. $-2abx^2+(4a^2+b^2)x-2ab$
1564. $x^2-2(a+b)x+a^2+b^2+c^2$
1565. $-x^2+2(a+b)x-(a+b)^2+c$
1566. $-a^2b^2x^2+2a^3bx-a^4+b^4$
1567. $x^2+2ax+a^2$
1568. $-x^2+(a^2+b^2)x-a^2b^2$

Nos trinómios seguintes, achar: 1º as raizes; 2º os valores de x que tornam estes trinomios positivos; 3º os valores de x que os tornam negativos:

1569. $x^2-33x+242$
1570. $100x^2-300x+325$
1571. $-x^2+21x-20$
1572. $x^2-12x+37$
1573. $-x^2-30x-161$
1574. $x^2+x+0{,}25$
1575. $-x^2+2x-2$
1576. $x^2-31x+30$
1577. $-256x^2+32x-1$
1578. $-x^2+2ax-4a^2$
1579. $x^2-(ab+a)x+a^2b$
1580. x^2-5x
1581. $-x^2+a^2$
1582. x^2+x
1583. x^2+1
1584. $5x^2$

Achar as raizes dos trinómios seguintes, decompô-los em quadrados e em factores; achar, depois, os valores de x que tornam estas funções positivas e os que as tornam negativas:

1585. $x^2-58x+517$
1586. $x^2-200x+20000$
1587. $-x^2+10x-50$
1588. $a^4x^2-2a^2x+1-a^4$
1589. $x^2+2p^2x-p^4$
1590. $-25x^2+49$

Sem determinar as raizes dos trinómios seguintes, dizer se os numeros -4, 0, 10 estão, ou não estão, compreendidos entre as raizes:

1591. x^2-8x+7
1592. $-x^2+8x-7$
1593. $x^2+11x+28$
1594. $-x^2+49$
1595. $x(x-12)$
1596. $x^2-10x-26$
1597. $-x^2+6x+7$
1598. $-4x^2+4x-1$
1599. x^2-100
1600. $-49x^2+7x+2$

Verificar as desigualdades seguintes:

1601. $x^2-4>0$
1602. $x^2+1<0$
1603. $-x^2-289>0$
1604. $x^4-16<0$
1605. $-x^2+ax>0$
1606. $b^2x^2-a^2<0$
1607. $x^4-x^2<0$
1608. $3x(3x-9)>0$
1609. $x^2-4x+5>0$
1610. $x^2+2ax+a^2<0$
1611. $-x^2+12x-35>0$
1612. $x^2+11x+28<0$
1613. $-x^2+33x-272,5<0$
1614. $-x^2+3x-20>0$
1615. $x^2-22x+121<0$
1616. $x^2-(a^2+b^2)x+a^2b^2>0$
1617. $x^2-4x+68<0$
1618. $-x^2+12x-37<0$
1619. $-a^2x^2+b^2x+c^2>0$
1620. $4a^2x^2y^2-4axy+1<0$
1621. $(x-2)(x-5)(x-8)>0$
1622. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$

Resolver as desigualdades simultâneas seguintes:

1623. $x^2-23x+60>0$, e $x^2-40x+300>0$
1624. $x^2-23x+60>0$, e $x^2-40x+300<0$.
1625. $x^2-23x+60<0$, e $x^2-40x+300>0$.
1626. $-x^2+23x-60>0$, e $-x^2+40x-300>0$.
1627. $x^2-18x+45<0$, e $x^2-20x+96>0$.
1628. $x^2+18x+45>0$, e $x^2-11x+28>0$.
1629. $-x^2+2x-1<0$, e $x^2-100<0$.
1630. $x^2+x-6=0$, e $x^2+3x-4>0$.
1631. $x^2-12x+32>0$, e $x^2-13x+22<0$.
1632. $ax^2+bx>0$, e $ax^2+bx+c>0$.
1633. $ax^2+b<0$, e $bx^2-b^2>0$.
1634. $x^2-16>0$, e $x^2-28x>0$.
1635. $x^2-31x+30<0$, $x^2-31x+58<0$, $x^2-31x+238<0$.
1636. $x^2-100x+99>0$, $x^2-100x+196>0$, $x^2-100x+900<0$.

Simplificar as frações seguintes:

1637. $\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-11x+30}$

1638. $\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-18x+77}$

1639. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-6x+5}$

1640. $\dfrac{x^2-4x}{x^2-13x+36}$

1641. $\dfrac{x^2-9}{x^2-3,5x+1,5}$

1642. $\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

1643. $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-8x+15}$

1644. $\dfrac{x^2+6x-27}{x^2-9x+18}$

1645. $\dfrac{x-1}{x^2-31x+30}$

1646. $\dfrac{x^2-13x+40}{(x^2-9x+20)\,(x^2-17x+72)}$

1647. $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$

1648. $\dfrac{x^2+6x+9}{3x^2+6x-9}$

1649. $\dfrac{(x^2-3x-4)\,(x^2+4x-5)}{(x^2-1)\,(x^2+x-20)}$

1650. $\dfrac{x^3+33x^2+230x}{x^4-629x^2+52900}$

1651. Achar a condição para que a expressão $(a+bx)^2+(a'+b'x)^2$ seja um quadrado perfeito. Demonstrar ainda que se as duas expressões

$$(a+bx)^2+(a'+b'x)^2 \quad \text{e} \quad (a+cx)^2+(a'+c'x)^2,$$

são quadrados, a expressão

$$(b+cx)^2+(b'+c'x)^2,$$

é tambem um quadrado.

1652. Se x' e x'' são as raizes do trinómio x^2+px+q, achar as condições a que devem satisfazer os coeficientes p e q para que

$$\alpha x'^2+\beta x'+\gamma=\alpha x''^2+\beta x''+\gamma,$$

onde α, β, γ, são tres números dados.

1653. Que deve ser n para que, seja qual fôr x, o trinómio

$$x^2+2x+n,$$

seja superior a 10?

1654. Resolver a desigualdade

$$x(x^4-7x^2+12)>0.$$

1655. Achar os valores limites de h para que a desigualdade

$$x^2+2hx+h>3/16$$

seja verificada, qualquer que seja x.

1656. Se a, b, c são os tres lados de um triángulo, o trinomio

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$$

é positivo, qualquer que seja x.

Que relação haveria entre a, b, c, se o trinómio fôsse quadrado perfeito?

1657. Que valor é preciso dar a m para que o trinómio

$$mx^2+(m-1)x+m-1$$

seja negativo, qualquer que seja x?

1658. Que valores se devem dar a m para que os trinómios seguintes sejam positivos, qualquer que seja x?

1° $(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6$;
2° $(4-m)x^2-3x+4+m$.

1659. Dada a quantidade h, que valor se deve atribuir a esta letra para que a desigualdade seguinte se verifique, qualquer que seja x?

$$\frac{(h+1)x^2+hx+h}{x^2+x+1}>1.$$

Resolver as desigualdades seguintes:

1660. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}>0$

1661. $\frac{x^2+10x+16}{x-1}>10$

1662. $\frac{7x-5}{8x+3}>4$

1663. $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}>1$

1664. $\frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4}>1$

CAPITULO VI

VARIAÇÃO DE FUNÇÕES

Noções Gerais.

235*a*. **Definição.** — *Variavel independente é uma quantidade suscetivel de tomar qualquer valor algebrico, seja qual fôr esse valor em tamanho.*

Se uma quantidade representada por x puder tomar sucessivamente todos os valores compreendidos entre $-\infty$ e 0 e todos os valores compreendidos entre 0 e $+\infty$, diremos que x *é variavel independente.*

Sobre uma reta dada ilimitada, X′X, tomemos um ponto fixo O, e um segmento OM$=x$.

X′ O ←x→ M X

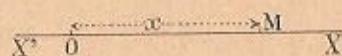



Fig. 13.

Se o ponto M se deslocar de O até X, o segmento OM tomará sucessivamente todos os valores positivos, compreendidos entre 0 e $+\infty$. Se o deslocamento se fizer de 0 até X′, OM tomará sucessivamente todos os valores compreendidos entre zero e $-\infty$.

Podemos dizer que o segmento OM é uma variavel independente.

235*b*. *Função da variavel independente é uma quantidade cujo valor depende do valor da variavel, á qual se liga por uma relação determinada ou fórmula.*

A superficie de um quadrado depende do lado do quadrado; se designarmos esse lado por x e a superficie por y, teremos: $y=x^2$ *(relação determinada)* diremos que y é uma função de x.

O *comprimento de uma circumferência* depende do raio dessa circumferencia; se designarmos o raio por x e a circumferência por y, a formula que liga essas duas quantidades é $y=2\pi x$; portanto, y é uma função de x.

235c. *Uma função é continua quando varia insensivelmente.*

A função precedente, $y=2\pi x$, é função continua, porque as variações de y crescem constanto e regularmente, quando x aumenta de 0 até $+\infty$.

Uma função é discontinua quando passa repentinamente de $+\infty$ a $-\infty$ ou inversamente, para certos valores de x.

A função, $y=\frac{x}{x-3}$, é discontinua para $x=3$.

Com efeito, para $x=2$, $y=\frac{2}{2-3}=-2$;

para $x=4$, $y=\frac{4}{4-3}=+4$;

para $x=3$, temos $y=\frac{3}{3-3}=\frac{3}{0}=\pm\infty$.

Quando x cresce de 2 para 3, y decresce de -2 até $-\infty$.
Quando x cresce de 3 para 4, y decresce de $+\infty$ para $+4$.
Vemos que para $x=3$ a função passa repentinamente de $-\infty$ para $+\infty$; é discontinua para esse valor de x.

235d. *Uma função é crescente quando aumenta de valor no mesmo tempo que a variavel.*

E' o caso da função $y=2\pi x$; é evidente que o valor de y aumenta no mesmo tempo que o valor de x.

Uma função é decrescente se diminue de valor quando o da variavel aumenta.

A função $y=\frac{1}{x}$ é decrescente porque o valor de y diminue quando o valor de x aumenta.

235e. *Uma função é linear, quando é representada em função da variavel por um polinómio do 1º gráu.*

EXEMPLO. : A função $y=4x+3$ é função linear, porque o binomio $4x+3$ é do 1º gráu em relação á variavel x.

235f. *Uma função passa por um máximo quando deixa de crescer para começar a diminuir ; passa por um minimo, quando deixa de decrescer para começar a crescer.*

Mais adiante, estudaremos as condições necessarias e suficientes para uma função passar por um maximo ou por um minimo.

235g. **Representação grafica das variações de uma função.** — Para representar graficamente as variações de uma função, empregam-se duas retas indefinidas, X'OX, Y'OY, perpendiculares entre si e cortando-se em O (*fig. 14.*).

Sobre a primeira reta X'X, chamada eixo dos X ou das abscissas, levam-se os valores sucessivos da variavel x.

Esses valores são considerados positivos *á direita* da origem O e negativos *á esquerda*.

Sobre a segunda reta, eixo dos Y ou das ordenadas, levam-se os valores sucessivos da função da variavel. Esses valores são considerados positivos *acima* da origem O e negativos *abaixo*.

FIG. 14.

Ao conjunto dessas duas linhas dá-se o nome de : *eixos de coordenadas.*

Determinam quatro regiões A, B, C, D, cujos pontos todos pódem ser representados por numeros algebricos, baseando-nos sobre os seguintes principios :

1º *Qualquer ponto é determinado quando conhecemos sua abscissa e sua ordenada.*

Determinemos o ponto M cuja abscissa $x=4$ e a ordenada $y=3$ (*fig. 14*).

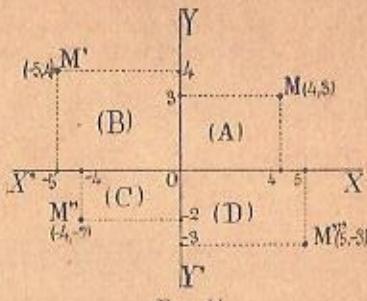
Sobre o eixo dos x, levemos o valor $x=4$; pelo ponto obtido, tracemos uma paralela ao eixo dos y.

Sobre o eixo dos y levemos o valor $y=3$; pelo ponto obtido, tracemos uma paralela ao eixo dos x.

O ponto M, encontro dessas paralelas aos dois eixos perpendiculares, é o ponto pedido.

2º *Todos os pontos da região* A, *situada no ângulo* XOY, *têm abscissa e ordenada positivas.*

E' o caso do ponto M do exemplo precedente. Reciprocamente, todos os pontos que têm abscissa e ordenada positivas, estão na 1ª região ou região A (*fig. 14*).

3º *Todos os pontos da região* B, *situada no ângulo* X'OY, *têm abscissa negativa e ordenada positiva* (*fig. 14*).

O ponto M′ tem como abscissa -5 e como ordenada $+4$.

Reciprocamente, todos os pontos de abscissa negativa e de ordenada positiva estão na região B, isto é, no ângulo X′OY.

4º *Todos os pontos da região C, situada no ângulo X′OY′, têm abscissa negativa e ordenada negativa (fig. 14).*

O ponto M″ tem como abscissa -4 e como ordenada -2.

Reciprocamente, todos os pontos de abscissa negativa e de ordenada negativa estão na região C, isto é, no ângulo X′OY′.

5º *Todos os pontos da região D, situada no ângulo XOY′ têm abscissa positiva e ordenada negativa (fig. 14).*

O ponto M‴ tem como abscissa $+5$ e como ordenada -3.

Reciprocamente, todos os pontos de abscissa positiva e de ordenada negativa, pertencem á região D, isto é, ao ângulo XOY′.

6º *Se tivermos uma sucessão de pontos representando uma relação entre duas quantidades, e se unirmos esses pontos por uma linha, teremos o grafico dessa relação.*

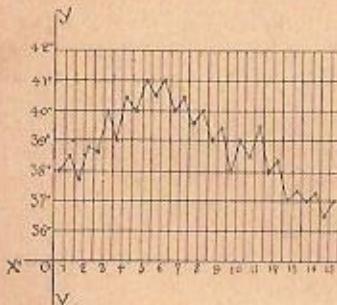



FIG. 15.

Muito conhecido é o grafico que representa a evolução da temperatura de um doente.

As divisões do eixo OX representam os dias ; as divisões do eixo OY marcam a temperatura (*fig.* 15)

Cada dia, toma-se a temperatura, de manhã e de tarde.

No quinto dia da doença, a temperatura do enfermo era de 40º de manhã e de 41º de tarde.

A febre teve seu ponto culminante no sexto dia ; depois, foi baixando ; comtudo, no 11º dia, recrudesceu, e depois, baixou gradualmente.

II. Variação da função : $y=ax+b$.

Dois casos se apresentam segundo o coeficiente de x fôr positivo ou negativo.

235*h*. 1.º **Caso** : $a>o$. — *Quando o coeficiente de* x *é positivo, a função :* y=ax+b *é crescente.*

Façamos variar x desde $-\infty$ até $+\infty$ e vejamos o que vem a ser y.

Para $x=-\infty$, $y=-\infty$;	Para $x=1$, $y=a+b$;
» $x=-3$, $y=-3a+b$;	» $x=3$, $y=3a+b$;
» $x=-2$, $y=-2a+b$;	» $x=+\infty$, $y=+\infty$;
» $x=0$, $y=b$;	

Pela simples inspeção do quadro acima, vemos que y cresce quando x cresce ; e varia de $-\infty$ para $+\infty$ quando x varia de $-\infty$ para $+\infty$.

235*i*. **Exemplo numérico.** — *Estudar as variações da função :* y=2x+1.

Façamos variar x de $-\infty$ até $+\infty$ e poderemos formar o quadro seguinte :

x	$-\infty$	-3	-1	0	$+1$	$+2$	$+4$	$+\infty$
y	$-\infty$	-5	-1	$+1$	$+3$	$+5$	$+9$	$+\infty$

O exame atento desse quadro mostra que :

Quando x cresce de $-\infty$ até -3, y cresce de $-\infty$ até -5 ;
» x » -3 até -1, y » -5 até -1 ;
» x » -1 até 0, y » -1 até $+1$;
» x » 0 até $+1$, y » $+1$ até $+3$;
» x » $+1$ até $+2$, y » $+3$ até $+5$;
» x » $+2$ até $+4$, y » $+5$ até $+9$;
» x » $+4$ até $+\infty$, y » $+9$ até $+\infty$.

235*j*. **Representação grafica da variação.** — Determinemos sucessivamente os pontos que têm as coordenadas :

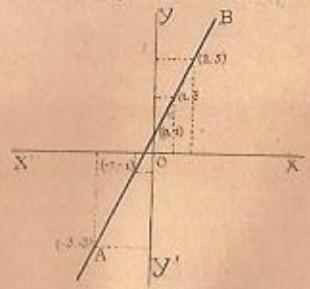
$(-3, -5)$, $(-1, -1)$,
$(0, +1)$, $(+1, +3)$,
$(+2, +5)$ $(+4, +9)$,

e unamos esses pontos, teremos a linha AB (*fig.* 16) : é uma reta, como mais adiante será demonstrado (n.º 235*o*).

FIG. 16.

235*k*. 2.º **Caso** : $a<0$.

Quando o coeficiente de x *é negativo, a funcção* : $y=-ax+b$ *é decrescente.*

Façamos variar x de $(-\infty)$ até $+\infty$ e vejamos o que vem a ser y.

Para $x=-\infty$, $y=+\infty$;	Para $x=1$, $y=-a+b$;
» $x=-3$, $y=+3a+b$;	» $x=3$, $y=-3a+b$;
» $x=-2$, $y=+2a+b$;	» $x=+\infty$, $y=-\infty$.
» $x=0$, $y=+b$;	

Esses resultados mostram que y diminue de valor desde $+\infty$ até $-\infty$ quando x cresce de $-\infty$ até $+\infty$.

A função é, pois, decrescente.

235*l*. **Exemplo numérico.** — *Estudar as variações da funçāo* : $y=-2x+1$.

Fazendo variar x de $-\infty$ para $+\infty$, formamos o quadro seguinte :

x	$-\infty$	-3	-1	0	$+1$	$+2$	$+4$	$+\infty$
y	$+\infty$	$+7$	$+3$	$+1$	-1	-3	-7	$-\infty$

O exame atento desse quadro mostra que :

Se x cresce de $-\infty$ até -3, y decresce de $+\infty$ até $+7$;
Se x cresce de -3 até -1, y decresce de $+7$ até $+3$;
Se x cresce de -1 até 0, y decresce de $+3$ até $+1$;
Se x cresce de 0 até $+1$, y decresce de $+1$ até -1 ;
Se x cresce de $+1$ até $+2$, y descrese de -1 até -3 ;
Se x cresce de $+2$ até $+4$, y decresce de -3 até -7 ;
Se x cresce de $+4$ até $+\infty$, y decresce de -7 até $-\infty$.

235*m*. **Representação grafica da variação.** — Por processo analogo ao precedente (n.º 235*j*.), teremos o grafico da figura 17.

235*n*. **A função** $y=ax+b$ **representa uma reta.** — Consideraremos dois casos particulares segundo as letras a ou b fôrem nulas, depois o caso geral em que a e b diferem de 0.

1.º **Caso particular:** $a=0$. — Nessa hipotese a função é : $y=b$

O valor de y é constante, seja qual fôr o valor de x. Os diferentes pontos da linha representada pela função têm todos a mesma ordenada, logo essa linha é uma reta paralela ao eixo X′X. (*fig.* 18).

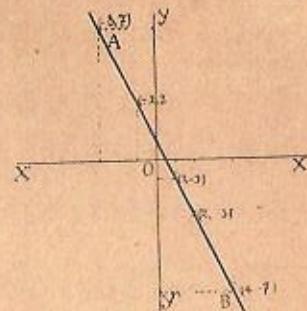



Fig. 17.

Observação. — 1.º Se b fôr *positivo*, a reta AB está acima do eixo X′X (*fig.* 18).

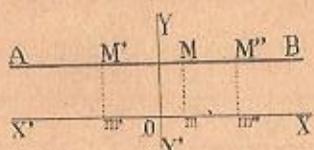



Fig. 18.

2º Se b fôr *negativo*, a reta AB está abaixo do eixo X′X.

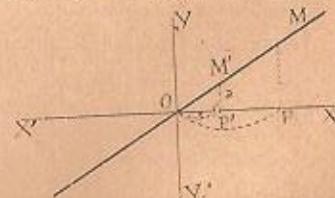
3º Se b fôr *nulo*, a reta AB confunde-se com o eixo X′X.

235*o*. 2.º **Caso particular** : $b=0$. — Nessa hipotese, a função vem a ser :

$$y=ax.$$

Para $x=0$, a função y iguala 0. A origem O está sobre a linha representada (*fig.* 19).

Fig. 19.

Para $x=1=OP'$,
$y=a=M'P'$.

Para qualquer valor de x, OP por exemplo, o valor correspondente de y é MP e temos (*fig.* 19) :

$$\overline{M'P'}=a\times\overline{OP'} \qquad (1)$$

e

$$\overline{MP}=a\times OP. \qquad (2)$$

Vamos demonstrar que os pontos O, M′, M *estão em linha reta.*

Com efeito, dividamos a expressão (2) pela expressão (1), membro a membro, teremos :

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{M'P'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}} \text{ ou } \frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'}.$$

Os dois triangulos retangulos OPM e OP'M' têm um angulo igual (angulo reto) compreendido entre dois lados proporcionais ; são semelhantes e têm os *angulos* iguais. O angulo POM de um iguala o angulo P'OM' do outro ; portantó, as retas OM e OM' têm *mesma direção* e os pontos O, M', M, estão em linha reta.

235*p*. 3º **Caso geral** : $a \neq 0$, $b \neq 0$. — Nessa hipótese, temos : $y = ax + b$. No 2º caso, mostramos que a função $y' = ax$, representa uma reta passando pela origem. Podemos escrever: $y = y' + b$.

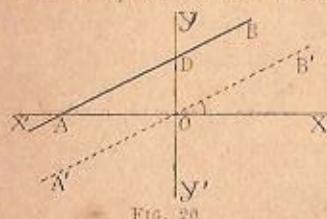



Fig. 20.

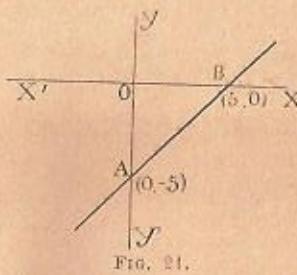
Conhecendo o valor de y', tiraremos o valor de y, juntando a quantidade constante b. A função será representada por uma reta AB paralela a A'B', tal que, para qualquer valor de x, a diferença das ordenadas correspondentes seja igual a b *(fig. 20)*.

235*q*. **Observações**. — 1.ª E' do valor de a que depende a grandeza do angulo XOB' ; eis porque esse coeficiente tem o nome de *coeficiente angular*.

2.ª Quando x é nulo, a função $y = ax + b$ reduz-se a : $y = b$. E' a ordenada do ponto D em que a reta AB corta o eixo YY'. Por esse motivo chama-se : *ordenada na origem*.

3ª Uma reta é *determinada* quando se conhecem *dois* dos seus pontos; logo, para se traçar a reta representada pela equação $y = ax + b$, é suficiente determinar as coordenadas de dois pontos quaisquer. Geralmente tomam-se os pontos onde a reta corta os eixos.

Fig. 21.

Para obter a reta representada pela equação $y = x - 5$, procuremos o ponto onde corta o eixo dos x, isto é, o ponto B que tem ordenada nula, ou $y = 0$: dahi vem : $x - 5 = 0$ ou $x = 5$. O ponto A, de abscissa $x = 0$, tem a ordenada $y = 0 - 5 = -5$.

Unindo A com B, vem a reta procurada AB, representação de $y = x - 5$ *(fig. 21)*.

235*r*. APLICAÇÕES

I. **Estudo do movimento retilineo uniforme**. — *Um móvel que anda sobre um eixo, tem movimento uniforme quando percorre, no mesmo sentido, espaços iguais em tempos iguais :* ou ainda, *quando os espaços percorridos são proporcionais aos tempos empregados em percorrê-los.*

Exemplo : O móvel M, que se desloca sobre o eixo X'X a partir de O, no sentido positivo, e percorre segmentos iguais, OA = AB = BC = CM, em tempos iguais, possue movimento uniforme *(fig. 22)*.

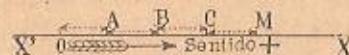



Fig. 22.

No movimento uniforme, velocidade é o espaço percorrido durante a unidade de tempo.

Se tomarmos *uma hora* para unidade do tempo e se os segmentos OA = AB = BC = CM, fôrem percorridos, cada um, durante uma hora, diremos que um desses segmentos mede a velocidade do movel para o movimento uniforme considerado.

Designando por e *o espaço percorrido durante um tempo* t, *por um movel animado de velocidade* v, *a formula do movimento uniforme será :*

$$e = vt.$$

Já encontramos essa fórmula. Podemos transforma-la e pôl-a sob outra forma

$$x = x_0 + vt.$$

Nessa formula, x representa o espaço e t o tempo.

A proposição seguinte o demonstra.

Para que um movimento seja uniforme é necessario e suficiente que o espaço seja uma função do 1º gráu em relação ao tempo.

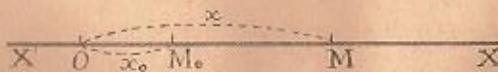



Fig. 23.

a) *A condição é necessária.* — Com efeito, suponhamos que o movel parta do ponto M_0 cuja abscissa é x_0. Desloca-se durante t segundos, percorre o espaço M_0M e chega ao ponto M cuja abscissa é x *(fig 23)*.

O espaço percorrido é : $x - x_0$.

Sendo o movimento uniforme devemos ter :

$$\frac{x-x_0}{t}=Constante=v \text{ (velocidade).}$$

Dessa fórmula deduzimos :

$$x=x_0+vt.$$

b) *A condição é suficiente.* — Com efeito, no instante t o movel percorreu o espaço indicado pela relação :

$$x=x_0+vt. \qquad (1)$$

X' O x M M' X

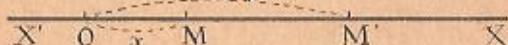



Fig. 24.

Se o movel se desloca duranto θ segundos *(fig. 24)*, o espaço percorrido durante $t+\theta$ segundos, será ;

$$x_1=x_0+v(t+\theta). \qquad (2)$$

Subtraindo membro a membro (1) de (2), teremos :

$$x_1-x=v\theta \text{ ou } \frac{x_1-x}{\theta}=v=Constante.$$

Essa ultima relação indica que o aumento do espaço é proporcional ao aumento do tempo ; portanto, o movimento é uniforme.

II. Exemplo numérico. — *A equação de um movimento uniforme sendo dada pela relação :* $x=3+\frac{t}{2}$,

1º *Estabelecer o grafico da reta que representa esse movimento ;*

2º *Dizer qual é a velocidade desse movimento (tomando para unidades o metro e o segundo) ;*

3º *Determinar o numero de segundos necessarios ao movel para se achar a 20 metros da origem.*

1.º Para determinar a reta representativa do movimento, procuremos os pontos onde corta os eixos *(fig. 25)*.

Para $t=0$, $x=3$ (é o ponto A).

Para $x=0$, $t=-6$ (é o ponto B).

A reta AB é a reta procurada ; é o *diagrama* do movimento *(fig. 25)*.

2º A velocidade é representada pelo coeficiente de t, isto é, 1/2 metro por segundo.

3º O móvel ocupa a origem quando $x=0$, isto é, no instante $t=-6$ *(fig. 25)*.

O móvel está a 20 m. da origem quando $x=20$, isto é, no instante t dado pela relação

Fig. 25.

$$20=3+\frac{t}{2},$$

que dá : $t=34$ segundos.

O tempo pedido será a diferença dos dois valores de t, isto é :

$$34-(-6)=40 \text{ segundos.}$$

Observação. — A inclinação do diagrama sobre o eixo X'X depende da velocidade ; quanto maior fôr a velocidade tanto mais inclinada será a reta AB.

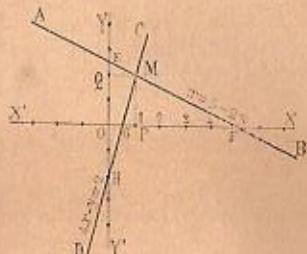
III. Resolução grafica de um sistema de 2 equações com 2 incógnitas. — Resolver graficamente o sistema :

$$\begin{cases} x=5-2y \\ 4x-y=2 \end{cases}$$

Fig. 25 *bis*.

Para isso consideremos x como variavel independente, y como função desta variavel e resolvamos cada equação em relação a x ; temos :

$$y=\frac{5}{2}-\frac{x}{2} \qquad (1)$$

e

$$y=4x-2. \qquad (2)$$

Como as equações são do 1.º gráu, os 2 graficos são 2 rétas das quais basta conhecer 2 pontos para determiná-las completamente. Em cada equação, fazendo $x=0$ e $y=0$ teremos os pontos onde a réta corta os eixos.

Para a 1.ª equação, estes 2 pontos são:

$$\left(x=0,\ y=\frac{5}{2}\right) \quad \text{e} \quad (x=5 \text{ e } y=0)$$

e vem a réta AB *(fig. 25 bis)*; para a 2.ª equação, estes 2 pontos são: $(x=0,\ y=-2)$ e $\left(x=\frac{1}{2},\ y=0\right)$ e vem a réta CD; as rétas AB e CD encontram-se no ponto M, cujas coordenadas são as raizes do sistema proposto.

Medindo MQ e MP, vem $x=1$ e $y=2$; são as raizes procuradas.

IV. Grafico dos trens. — Se um trem anda com velocidade constante, v, o diagrama de seu movimento é uma reta de *inclinação* v; quando pára, sua distancia á origem não muda e o diagrama é uma *réta paralela a* Ot, eixo das abscissas.

Correndo o trem com velocidade v', o diagrama do movimento é nova *réta de inclinação* v', e assim por diante.

Como exemplo, tracemos o grafico de alguns trens da E.F.C.B., correndo entre S. Paulo e Rio. Eis o quadro dos horarios e o grafico correspondente é o da fig. 26.

Distancias	Estações.		SP2	RP2	NP2	NP4	LP2	SP1	RP1
0	São Paulo....	said.	4,30	6,55	19,30	20,30	21,30	21,32	19,00
175	Pindamonhangaba..........	c.	9,54	10,57	23,33	0,37	1,28	15,58	14,57
		s.	9,58	11,00	23,35	0,40	1,30	15,54	14,54
248	Cruzeiro........	c.	12,18	12,37	1,12	2,23	3,13	13,38	13,15
		s.	13,20	12,46	1,18	2,28	3,20	12,39	13,07
347	Barra Mansa....	c.	16,17	15,01	3,41	4,40	5,40	9,46	10,53
		s.	16,33	15,03	3,43	4,42	5,42	9,42	10,51
392	Barra do Pirai ..	c.	17,54	16,01	4,38	5,38	6,38	8,35	9,56
		s.	18,50	16,07	4,44	5,44	6,44	8,10	9,50
439	Belém	c.	19,55	17,14	5,54	6,51	7,53	6,29	8,36
		s.	20,01	17,20	6,01	6,58	8,00	6,23	8,30
500	Rio de Janeiro ..	ch.	21,10	18,30	7,20	8,10	9,10	4,50	7,20

Graficos de trens entre S. Paulo e Rio.

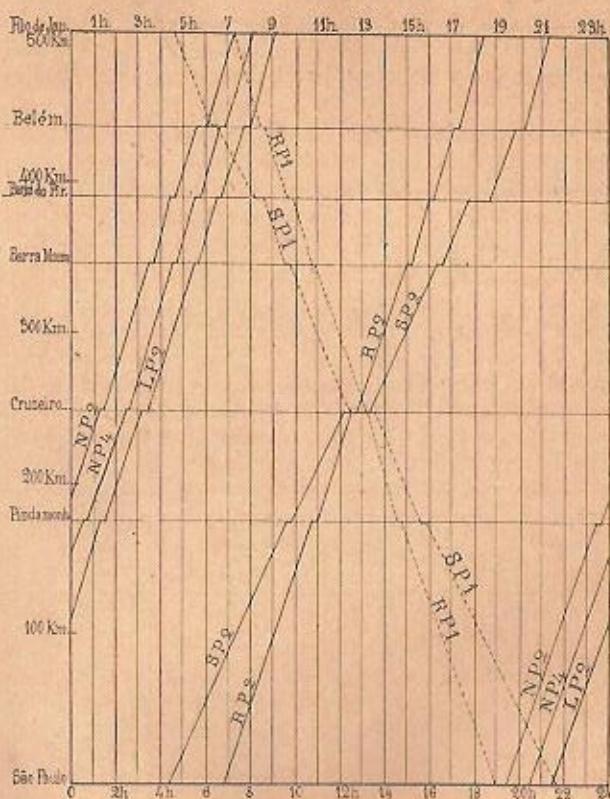



FIG. 26.

V. Variação das funções: $y=x^2$ e $y=ax^2$.

235*s*. **Variação da função:** $y=x^2$. — *A função* $y=x^2$ *é decrescente quando* x *varia desde* $-\infty$ *até* 0; *é crescente quando* x *varia de* 0 *até* $+\infty$. *Passa por um minimo quando* $x=0$.

Lembremos o que segue: 1º estudar as variações da função $y=x^2$ é procurar o que vem a ser y quando x varia de $-\infty$ até $+\infty$.

2º O quadrado de qualquer número, positivo ou negativo, é *sempre positivo;* ou o quadrado de um número algebrico é o mesmo que o quadrado de *seu valor absoluto.*

Quando o valor absoluto de x é muito grande, seu quadrado é tambem muito grande ; por consequencia, para :

$$x = -\infty,\ y = +x^2 = +\infty.$$

Se o valor absoluto de x diminue, seu quadrado diminue e o valor da função $y=x^2$ é *decrescente.*

Para $x=0$, temos tambem $y=0$.

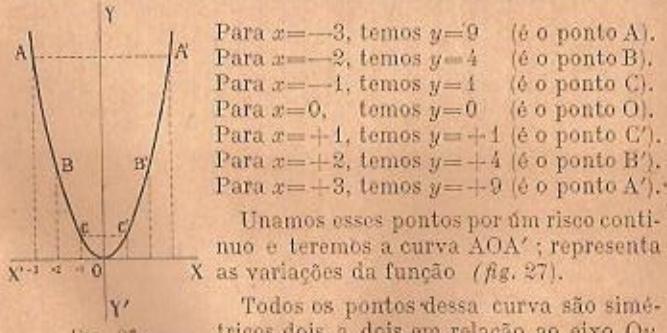
Quando o valor de x aumenta de 0 até $+\infty$, a função $y=x^2$ cresce tambem de 0 até $+\infty$.

Segundo a definição (nº 235*f*), a função passa por um *minimo* para $x=0$, pois, para esse valor, deixa de decrescer para começar a crescer.

235*t*. **Representação grafica**. — Para representar graficamente as variações da função $y=x^2$, consideremos dois eixos retangulares OX e OY *(fig. 27)*, determinemos a posição de certos pontos em relação a esses eixos, por exemplos, os do quadro seguinte :

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+\infty$
y	$+\infty$	$+9$	$+4$	$+1$	0	$+1$	$+4$	$+9$	$+\infty$

Fig. 27.

Para $x=-3$, temos $y=9$ (é o ponto A).
Para $x=-2$, temos $y=4$ (é o ponto B).
Para $x=-1$, temos $y=1$ (é o ponto C).
Para $x=0$, temos $y=0$ (é o ponto O).
Para $x=+1$, temos $y=+1$ (é o ponto C').
Para $x=+2$, temos $y=+4$ (é o ponto B').
Para $x=+3$, temos $y=+9$ (é o ponto A').

Unamos esses pontos por um risco continuo e teremos a curva AOA' ; representa as variações da função *(fig. 27)*.

Todos os pontos dessa curva são simétricos dois a dois em relação ao eixo Oy.

235*u*. **Variação da função** : $y=ax^2$. — Essa função é ana-

loga á precedente : as ordenadas da anterior são multiplicadas pelo numero a.

Dois casos se apresentam conforme a fôr positivo ou negativo, isto é, $a>0$ ou $a<0$.

1º **Caso** : $a>0$. — Seja a função $y=\dfrac{x^2}{3}$. O valor de a é $\dfrac{1}{3}$.

As ordenadas da curva são as da curva precedente divididas por 3.

Podemos formar o quadro seguinte :

x	$-\infty$	-6	-4	-3	0	$+3$	$+4$	$+6$	$+\infty$
y	$+\infty$	$+12$	$+5\frac{1}{3}$	$+3$	0	$+3$	$+5\frac{1}{3}$	$+12$	$+\infty$

A fig. 28 é o grafico representativo.

2º **Caso** : $a<0$. — Seja a função $y=-\dfrac{x^2}{3}$.

O valor de $a=-1/3$.

As ordenadas são iguais ás da curva precedente, mas de sinais contrarios.

A função cresce de $-\infty$ até 0, depois decresce de 0 até $-\infty$ passando por um *maximo* para $x=0$.

Podemos formar o quadro seguinte dos respetivos valores de x e de y.

A curva é a da fig. 29.

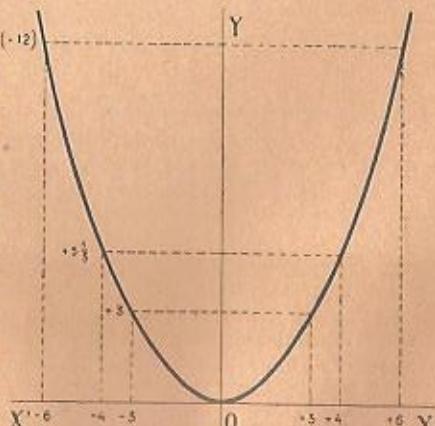



Fig. 28.

x	$-\infty$	-6	-5	-4	-3	0	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+\infty$
y	$-\infty$	-12	$-8\frac{1}{3}$	$-5\frac{1}{3}$	-3	0	-3	$-5\frac{1}{3}$	$-8\frac{1}{3}$	-12	$-\infty$

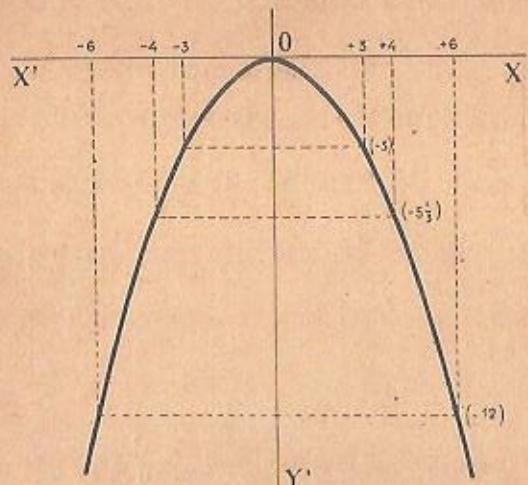



FIG. 29.

235v. APLICAÇÕES

I. Queda livre de um corpo no vacuo. — 1.º Ensina a fisica que *no vacuo, os espaços percorridos por um corpo, em queda livre, são proporcionais aos quadrados dos tempos empregados em percorrê-los.*

Essa lei vem sintetizada na formula $e = \frac{gt^2}{2}$.

Nessa expressão, e designa o espaço percorrido ; t o tempo empregado em percorrer esse espaço ; g, a aceleração do movimento produzido pela gravidade.

O *diagrama* do espaço percorrido é uma curva analoga ás do n.º 235u.

2.º Outrosim, a fisica ensina que a velocidade de um corpo em queda livre é proporcional á duração da queda.

Essa lei vem sintetizada na formula : $v = gt$.

O *diagrama* da velocidade é uma reta passando pela origem. (Ver n.º 235o.)

II. Exemplo numérico. — *Um corpo cai em queda livre de 490 metros de altura. Quanto tempo durará a queda, se* g=9 m. 80 ? — *Qual será a sua velocidade ao chegar ao solo ?*

Na formula : $e = \frac{1}{2} gt^2$, tiremos o valor de t. Temos : $t^2 = \frac{2e}{g}$

e $t = \sqrt{\frac{2e}{g}}$.

Substituindo as letras pelos valores do problema, teremos

$$t = \sqrt{\frac{490.2}{9,80}} = \sqrt{\frac{980}{9,80}} = \sqrt{100},$$

ou : $t = 10$ segundos.

A velocidade se tira da relação : $v = gt$, ou $v = 9{,}8 \times 10 = 98$ m.

IV. Variação das funções : $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{a}{x}$.

235x. **Variação da função :** $y = \frac{1}{x}$. — *A função* $y = \frac{1}{x}$ *decresce sempre ; para* $x = 0$, *é discontinua.*

Quando $x = -\infty$, a função é infinitamente pequena, visto o denominador da fração $\frac{1}{x}$ ser infinitamente grande, por consequencia, para $x = -\infty$, $y = 0$.

Quando x cresce de $-\infty$ até 0, a função é negativa e decresce até $-\infty$, porque $\frac{1}{0} = \pm\infty$.

Mas quando x se torna positivo, a função é tambem positiva; logo, é preciso que essa função passe repentinamente de $-\infty$ para $+\infty$; nesse caso, diz-se que a função é *discontinua* para $x = 0$.

Quando x cresce de 0 até $+\infty$, a função $\frac{1}{x}$ conserva-se positiva, mas decresce insensivelmente até 0 quando x cresce até o infinito.

$235x$. **Representação grafica.** — Tomemos dois eixos retangulares ; dando a x os valores do quadro abaixo e calculando os valores correspondentes de y, teremos :

x	$-\infty$	-5	-3	-1	$-1/3$	0	$+1/3$	$+1$	$+3$	$+5$	$+\infty$
y	0	$-1/5$	$-1/3$	-1	-3	$\mp\infty$	$+3$	$+1$	$+1/3$	$+1/5$	0

Para $x=-3$, temos $y=-\frac{1}{3}$ (ponto A).

Para $x=-1$, temos $y=-1$ (ponto B).

Para $x=-\frac{1}{3}$, temos $y=-3$ (ponto C).

Para $x=+\frac{1}{3}$, temos $y=+3$ (ponto C').

Para $x=+1$, temos $y=+1$ (ponto B').

Para $x=+3$, temos $y=+\frac{1}{3}$ (ponto A').

A curva representativa da função $\frac{1}{x}$ (*fig.* 30) encontra os eixos X'X e Y'Y no infinito : as retas X'X e Y'Y são as *asintotas* da curva, isto é, *tangentes no infinito*.

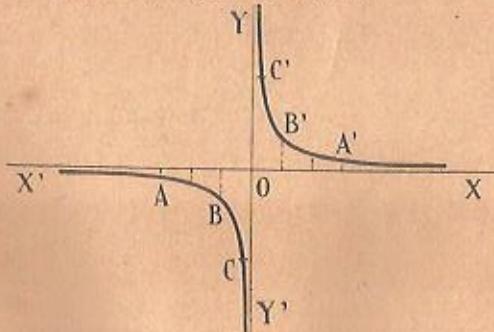



FIG. 30.

$235y$. **Variação da função :** $y=\frac{a}{x}$. — Essa função é análoga á precedente : as ordenadas desta são multiplicadas pelo coeficiente a.

Distinguiremos dois casos segundo a fôr positivo ou negativo, isto é, segundo : $a>0$ ou $a<0$.

1.º **Caso** : $a>0$. — Seja a função $y=\frac{3}{x}$.

O valor de a é 3 ; as ordenadas da curva precedente são multiplicadas por 3 e o quadro precedente vem a ser :

x	$-\infty$	-5	-3	-1	$-1/3$	0	$+1/3$	$+1$	$+3$	$+5$	$+\infty$
y	0	$-3/5$	-1	-3	-9	$\mp\infty$	$+9$	$+3$	$+1$	$+3/5$	0

A curva é a da fig. 31, traço cheio.

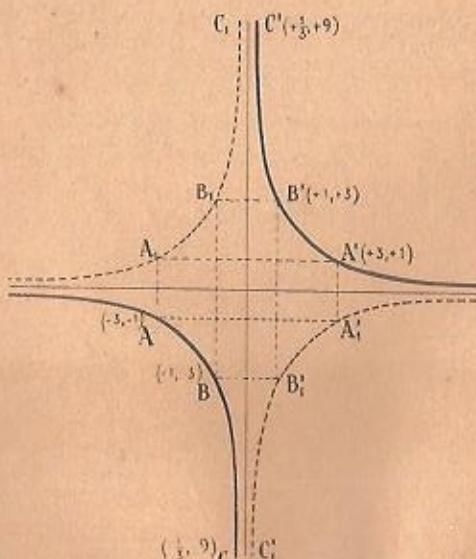



FIG. 31.

2.º **Caso** : $a<0$. — Seja a função $y=-3/x$; aqui o valor de a é -3; as ordenadas são iguais ás da curva precedente, porém de sinais contrários.

O quadro das variações vem a ser :

x	$-\infty$	-5	-3	-1	$-1/3$	0	$+1/3$	$+1$	$+3$	$+5$	$+\infty$
y	0	$+3/5$	$+1$	$+3$	$+9$	$\pm\infty$	-9	-3	-1	$-3/5$	0

A curva é a da fig. 31, traço pontuado.

235z. APLICAÇÃO

Lei de Mariote. — *Numa temperatura invariavel, os volumes de uma mesma massa de gaz estão na razão inversa das pressões que suporta.*

Seja V o volume de um gaz sob a pressão de H, e V′ o volume desse mesmo gaz sob a pressão de H′. Baseados na lei de Mariote, poderemos escrever :

$$\frac{V}{V'}=\frac{H'}{H},$$

ou ainda : $V.H=V'.H'=$ *Constante* (a, por exemplo).

Por esta ultima relação, podemos calcular a pressão em função do volume e da constante a, e reciprocamente.

Temos, pois : $H=\frac{a}{V}$, expressão analoga á função que acabamos de estudar.

Exemplo numérico. — *Sob a pressão de 8 atmosferas, uma massa de gaz ocupa um volume de 0,5 dm³. Representar as variações da pressão quando o volume varia entre 0,2 dm³ e 0,7 dm³.*

Representemos por y a pressão correspondente ao volume variavel x; poderemos escrever, segundo a lei de Mariote :

$$y\times x=8\times 0{,}5=4,$$

ou

$$y=\frac{4}{x}.$$

Se fizermos variar x entre 0,2 e 0,7, poderemos formar o quadro seguinte :

x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y	20	13 1/3	10	8	6 2/3	5 5/7

Indica esse quadro que a pressão diminue de 20 atmosferas até 5 5/7 atmosferas, quanto o volume aumenta de 0,2 dm³ até 0,7 dm³.

A curva seguinte (*fig.* 32) representa essas variações.

A parte da curva AB que satisfaz ao enunciado pertence á hiperbole representada pela função

$$y=\frac{4}{x}.$$

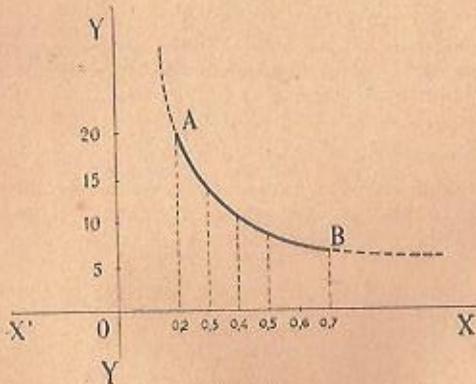



FIG. 32.

Problema I. — *Uma linha de bondes reune duas estações A e B, distantes de 9 km.; de cada estação, saem carros de 3 em 3 minutos, andando com mesma velocidade uniforme nos dois sentidos. Um viajante a pé, percorre o mesmo caminho, de A para B, com velocidade uniforme. Vê um carro chegar e outro sair, quando parte da estação A e quando chega á estação B. Na viagem, encontra 17 bondes indo no mesmo sentido que êle*

e 41 no sentido contrario, não contando os 4 carros da saida e da chegada. Calcular a velocidade do homem e do bonde. Representação grafica.

Levemos a distancia AB sobre o eixo vertical e os tempos sobre o eixo horizontal *(fig. 33)*; o homem a pé seguirá o grafico AC encontrando, ao todo, os bondes de 0 a 18 de mesmo sentido e 0' a 42' de sentido contrario.

Nota-se que a contagem dos bondes de 0 a 18 e de 0' a 42' para os dois sentidos corresponde com os dados do problema e facilita o calculo dos tempos.

Seja h metros por minuto a velocidade do homem, t minutos o tempo que leva para ir de A até B, segundo o grafico AC, e b metros por minuto a velocidade dos bondes.

Como ha 9.000 m. de A até B, temos:

$$ht = 9.000.$$

O bonde 18 partiu $3.18 = 54$ minutos depois do homem; logo, levou $(t-54)$ minutos para percorrer os 9.000 metros, com velocidade b; temos:

$$(t-54)b = 9.000. \quad (2)$$

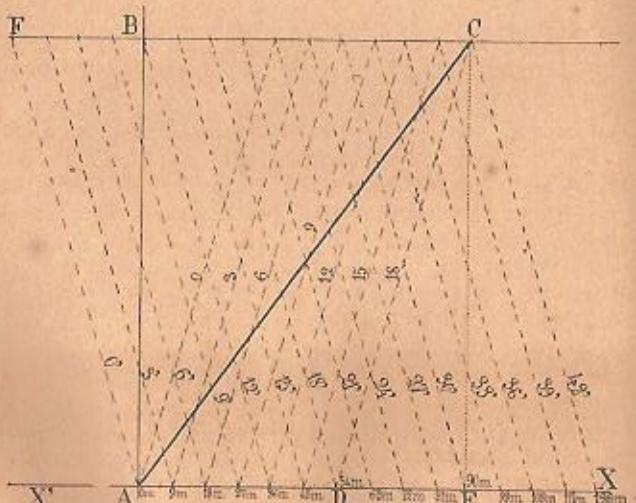



FIG. 33.

O bonde 42' sai de B, de modo tal que ao chegar em A,

terão decorrido $3.42 = 126$ minutos desde que o homem partiu de A; como esse bonde sai de B no instante em que o homem chega, segue-se que leva $(126-t)$ minutos para percorrer o trajecto BA, com velocidade b, segundo o grafico CX, e temos:

$$(126-t)b = 9.000. \quad (3)$$

Resolvendo as equações (1), (2) e (3), teremos as incógnitas h, b e t; vem:

$h = $ **100 metros**, $b = $ **650 metros**, $t = $ **90 minutos**.

Problema II. — « *Aposto, dizia um joven ciclista A a dois veteranos B e C, que chegarei em São Paulo antes dos Snres! — Antes de nós! respondeu B; pois bem aceitamos a aposta; são 4 horas da manhã; o que chegar o ultimo pagará o jantar aos outros.* » *Assim ficou combinado e A partiu logo.* « *Quanto a nós, disse B a C, temos tempo de sobra e será mais honroso sairmos tarde; como ando 8 km. por hora mais que este imprudente A, partirei em ultimo lugar.* » *Ás 6 h. 55 m., C parte percorrendo os 80 primeiros km. com a velocidade de A e o resto com a velocidade de B; este parte ás 8 h. 40 m... mas chega em São Paulo 5 min. depois de C, que chegára tambem 5 min. depois de A. Calcular o comprimento do trajeto, a velocidade de A e a que horas chegou.*

O problema póde ser modificado fazendo sair mais cedo, C de 5 minutos, e B de 10 minutos; então, os 3 ciclistas chegam juntos em São Paulo e B e C encontram-se no fim dos 80 primeiros quilometros, viajam juntos o resto do trajeto e chegam ao mesmo tempo a São Paulo.

Seja a metros por minuto a velocidade de A, b metros por minuto a de B e t minutos o tempo que B leva para percorrer os 80 primeiros quilometros.

No problema modificado, A sai ás 4 horas; C, ás 6 h. 50 m. ou $2 \times 60 + 50 = 170$ min. mais tarde e B, ás 8 h. 30 m. ou $10 \times 60 + 30 = 100$ min. depois de C.

Como B percorre 80 km. ou 80.000 m. em t minutos com a velocidade b, temos:

$$bt = 80.000. \quad (1)$$

Como C encontra B no fim desses 80.000 m. tendo saido 100 min. mais cedo, com a velocidade a, temos:

$$a(100+t) = 80.000. \quad (2)$$

Sabemos que b vale 8 km. mais por hora que a, ou 8.000 m. por 60 min., ou 400/3 de met. por minuto ; logo,

$$a+\frac{400}{3}=b. \tag{3}$$

As equações (1), (2) e (3) resolvem a maior parte do problema.

Multiplicando (3) por t e desinvolvendo (2), vem :

$$at+\frac{400t}{3}=bt=80.000, \text{ por causa de (1) ;}$$

$$at+100a=80.000.$$

Subtraindo membro a membro, vem :

$$100a=\frac{400t}{3};$$

donde

$$a=\frac{4t}{3}. \tag{4}$$

Substituindo a na equação (2), vem :

$$\frac{400t}{3}+\frac{400t^2}{300}=80.000,$$

ou

$$t^2+100t-60.000=0.$$

As raizes são $t'=200$ min. e $t''=-300$ min.

A solução negativa não convem ao problema.

A equação (4) dá : $a=\frac{4t}{3}=\frac{800}{3}$ de metros.

A equação (3) dá : $b=\frac{800}{3}+\frac{400}{3}=400$ metros.

Para calcular todo o trajeto, temos este problema : A *e* B *correm com as velocidades respetivas de* $\frac{800}{3}$ *de metros e* 400 *metros por segundo ;* B *parte* 8 *h.* 30 *m.*—4 h.=4 h. 30 m. *ou* 60×4+30=270 *minutos mais tarde ; qual é a distancia percorrida quando* A *e* B *se encontram?*

Se x met. fôr essa distancia e y min. o tempo levado por B, teremos :

$$x=y.400=(y+270)\frac{800}{3}.$$

Resolvendo, vem : $x=216.000$ met.$=$**216 km.**

$y=540$ min.$=9$ horas.

A chega em São Paulo ás 4 horas, mais 270 min. ou 4 h 30 min., mais 9 h., ou ás **17 h. 30 min.**

Sua velocidade é $\frac{800}{3}$ de metro por minuto ou $\frac{800\times 60}{3}$ = **16km. por hora.**

A distancia percorrida é de **216 km.**

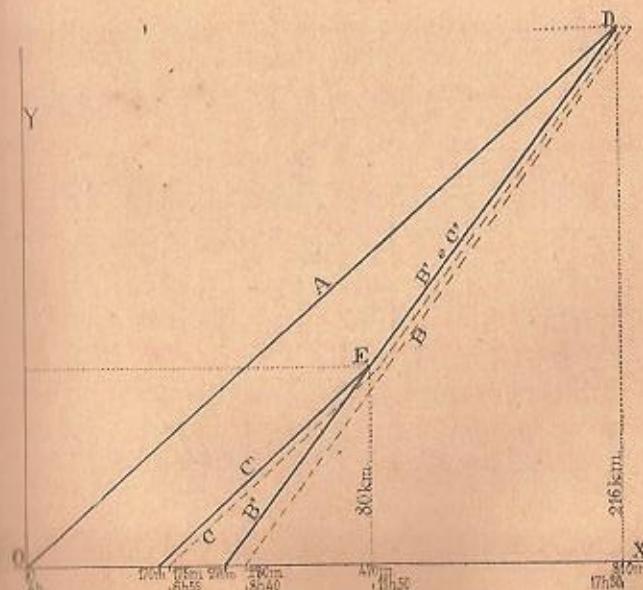



Fig. 34.

Na figura 34, OD é o grafico de A, C' e B' são os graficos modificados de C e B ; as linhas pontuadas C e B figuram os graficos verdadeiros. Os tempos vêm contados no eixo horizontal e os km. no eixo vertical.

236. **Resolução grafica da equação do 2.º gráu.** — Seja resolver graficamente a equação do 2.º gráu : $ax^2+bx+c=0$. Começa-se por construir a curva da função : $y=ax^2+bx+c$; é sempre uma curva do 2.º gráu : elipse, hipérbole ou parábola, geralmente uma parábola ABDFG *(fig. 34 bis)* ; as abscissas OC e OE onde a curva corta o eixo dos x são as raizes da equação $ax^2+bx+c=0$; basta medi-las sobre a figura para ter x' e x''.

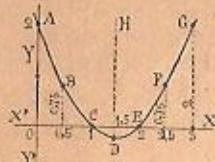



FIG. 34 *bis.*

A fig. 34 *bis* é a curva da função $y=x^2-3x+2$; como OC=1 e OE=2, vemos que as raizes da equação $x^2-3x+2=0$ são : $x'=1$ e $x''=2$.

Para maior desinvolvimento, ver *Algebra c. sup.*, n.º 499 e seguintes.

236 *bis.* **Estudo da função** : $y=x^m$. — Se fizermos variar x desde $-\infty$ até $+\infty$ teremos o seguinte quadro dos valores correspondentes de x e de y :

x	$-\infty$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...	∞
y	$\pm\infty$	...	$(-4)^m$	$(-3)^m$	$(-2)^m$	$(-1)^m$	0	1	2^m	3^m	4^m	...	$+\infty$

Para os valores de y ha 2 casos, conforme m fôr par ou impar.

1.º Para m par, os valores de y são todos positivos e iguais 2 a 2, porque para $x=a$, temos $y=a^m$ e para $x=-a$ temos tambem o mesmo valor $y=a^m$.

EXEMPLO : $y=x^2$. — Demos a x os valores $-\infty, \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 1, 2, 3 \ldots +\infty$, teremos a seguinte tabela dos valores de y :

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$+\infty$
y	$+\infty$	...	9	4	1	0	1	4	9	...	$+\infty$

A curva é a da fig. 27 ; é simétrica em relação ao eixo dos y.

Os resultados são quasi os mesmos para m igual a qualquer outro número par, como 4, 6, 8, etc.

2.º Quando m fôr impar os valores de y são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de sinais contrários, negativos quando x fôr negativo e positivos quando x fôr positivo.

EXEMPLO : $y=x^3$. — Se fizermos $x=-\infty, \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ os valores correspondentes de y serão os do quadro abaixo :

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$+\infty$
y	$-\infty$	...	-27	-8	-1	0	1	8	27	...	$+\infty$

FIG. 35.

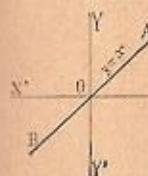
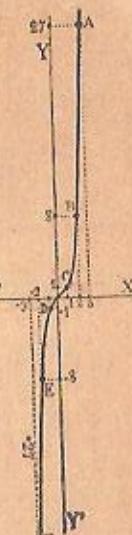
A curva é a da fig. 35 ; é continua e simétrica em relação ao centro O.

3.º Ha um caso particular interessante ; é o de $m=1$; então a função simplifica-se e é $y=x$; é uma função do 1.º gráu e o grafico reduz-se á réta AB *(fig. 36)*, bissetriz do angulo XOY.

FIG. 36.

236 *ter.* **Estudo da função** : $y=\frac{1}{x^m}$. — Dando á variável independente x todos os valores possiveis desde $-\infty$ até $+\infty$, teremos o seguinte quadro dos valores correspondentes de x e de y :

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$+\infty$
y	0	...	$\frac{1}{(-3)^m}$	$\frac{1}{(-2)^m}$	$\frac{1}{(-1)^m}$	$\pm\infty$	1	$\frac{1}{2^m}$	$\frac{1}{3^m}$	...	$+\infty$

Para esta função, devemos tambem distinguir os casos de m par e de m impar.

1.º Quando m fôr par, todos os valores de y são positivos e iguais 2 a 2 porque tanto para $x=a$ como para $x=-a$, temos o mesmo valor $y=\frac{1}{a^m}$.

Exemplo : $y=\frac{1}{x^2}$. — Dando a x os valores $-\infty, \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots +\infty$, temos o seguinte quadro dos valores correspondentes de x e de y:

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$+\infty$
y	0	...	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	...	$+\infty$

A curva compreende dois ramos AB e CD (*fig.* 37), simétricos em relação ao eixo de y. Cada ramo parte de 0 e vai até o ∞ para $x=0$.

Fazendo $m=4$, 6, ou qualquer outro número par, obtêm-se resultados muito semelhantes.

2.º Quando m fôr impar, os valores de y são iguais 2 a 2 em valor absoluto, mas de sinais contrários ; são negativos para x negativo e positivos para x positivo.

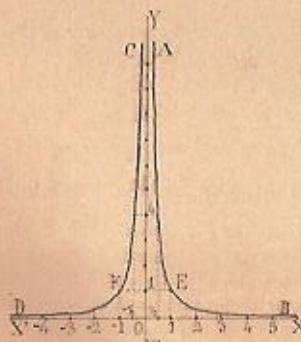



Fig. 37.

Exemplo : $y=\frac{1}{x^3}$. — Dando a x os valores $-\infty, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots +\infty$ teremos os seguintes valores de y indicados no quadro abaixo :

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...	$+\infty$
y	0	...	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{8}$	-1	-8	$\pm\infty$	8	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	...	0

A curva representativa é a da fig 38. Compreende os dois ramos AC e DF, simétricos em relação ao centro O.

Quando x cresce de $-\infty$ até 0, y começa por valer 0, é sempre negativo e decresce até $-\infty$.

Quando x cresce de 0 até $+\infty$, y começa por valer $+\infty$, é sempre positivo e decresce pouco a pouco até 0.

No ponto $x=0$, a função y é discontinua, porque passa repentinamente de $-\infty$ a $+\infty$.

A curva representativa (*fig.* 38) parece uma hipérbole, mas não o é porque a equação $y=\frac{1}{x^3}$ ou $x^3y=1$ é do 4.º gráu, e sabe-se que a hipérbole é uma das 3 curvas do 2.º gráu.

Fig. 38.

Para $m=5$ ou qualquer valor impar, obtêm-se resultados parecidos com os de $m=3$.

3.º Para $m=1$, encontra-se a função $y=\frac{1}{x}$, que já foi estudada (n.º 235, *w*, *fig.* 30) ; é uma hipérbole equilátera.

236 iv. **Estudo da função** : $y=\sqrt[n]{x}$. — Dando a x todos os valores possiveis desde $-\infty$ até $+\infty$, teremos o seguinte quadro dos valores correspondentes de x e de y:

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$+\infty$
y	$\sqrt[n]{-\infty}$	...	$\sqrt[n]{-3}$	$\sqrt[n]{-2}$	$\sqrt[n]{-1}$	0	1	$\sqrt[n]{2}$	$\sqrt[n]{3}$	...	$\sqrt[n]{\infty}$

Mais uma vez precisamos considerar os dois casos de m par e de m impar.

1.º Quando m fôr par, y tem valores imaginários para todos os valores negativos de x; logo, não ha curva real desde $x=-\infty$ até $x=0$; a curva real existe apenas para $x \geqq 0$; os valores de y começam por 0, têm o duplo sinal $\pm$ e vão até $\pm\infty$. A variavel independente x não póde ser negativa porque daria y imaginário; só póde variar de 0 até ∞; a cada valor positivo de x correspondem para y dois valores iguais e de sinais contrários, porque, sendo par, o radical tem o duplo sinal $\pm$.

Exemplo: $y=\sqrt{x}$. — Neste caso, $m=2$. — Dando a x os valores 0, 1, 4, 9, 16, 25, ... teremos o seguinte quadro dos valores de x e de y:

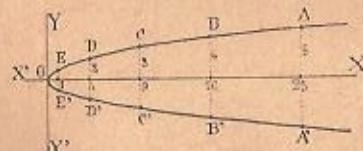
x	0	1	4	9	16	25	...	∞
y	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	...	$\pm\infty$

A curva representativa é a da fig. 39; é uma curva do 2.º grâu, porque a equação $y=\sqrt{x}$, por elevação ao quadrado, dá: $y^2=x$, relação do 2.º grâu.

Fig. 39.

Póde-se demonstrar que é uma parábola de eixo OX e de vertice O.

Para $m=4$ ou qualquer número par, os resultados são parecidos com os de $m=2$; mas a curva não é mais uma parábola, porque a equação despojada do radical é de grâu superior a 2.

2.º Quando m fôr impar, x póde tomar todos os valores possíveis, desde $-\infty$ até $+\infty$ e a cada valor de x corresponde sempre um valor real para y; os valores de y têm o sinal de x; são negativos para x negativo e positivos para x positivo.

Exemplo: $y=\sqrt[3]{x}$. — E' o caso de $m=3$. — Dando a x os valores $-\infty$, ..., -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27, ... $+\infty$, temos este quadro dos valores de x e de y:

x	$-\infty$	...	-27	-8	-1	0	1	8	27	...	$+\infty$
y	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$+\infty$

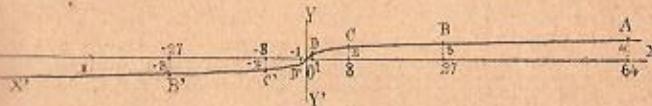



Fig. 40.

A curva representativa é a da fig. 40.

A função y começa pelo valor $-\infty$, cresce sempre, alcança o valor 0 para $x=0$ e o valor $+\infty$ para $x=+\infty$.

A curva ABCDOD'C'B' é simétrica em relação ao centro 0.

Para $m=5$ ou qualquer valor impar, os resultados são parecidos com os de $m=3$.

3.º Para $m=1$, a função é outra vez $y=x$, já encontrada no n.º 236 *bis*, 3.º).

EXERCICIOS

Resolver graficamente os numeros 883, 884, 885 e 887.

Representar graficamente as funções seguintes:

128a. $y=3x-2$.

129a. $y=-3x+2$.

130a. $y=\frac{x}{2}-1$.

131a. $y=\frac{x}{2}+1$.

132a. $y=\frac{3x}{2}-3$.

133a. $y=-\frac{2x}{3}+1$.

134a. Um batalhão sai do quartel ás 4 horas da madrugada e marcha na razão de 5 km. por hora. Cada vez que percorre 4 km. descansa 12 minutos. Acerca do meio da etapa, pára 1 hora em lugar de 12 minutos. O batalhão chegou ao meio-dia. Dizer o caminho percorrido. *(Solução aritmetica e grafica.)*

135*a*. O trem A sai do ponto O ás 8 h. com a velocidade constante de 30 km. por hora; o trem B parte do mesmo ponto O ás 12 h., com a velocidade de 45 km. por hora durante 1 h. 40 m. e, depois, de 60 km. A que horas B ficará a 20 km. de A? *(Solução aritmetica e grafica.)*

136*a*. Dois ciclistas A e B partem ao mesmo tempo da cidade M e dirigem-se para a cidade N. A anda 18 km. por hora e B, 15 km. A 12 km. de M, A encontra um amigo e volta com êle em M, onde se demora 20 minutos. Parte de novo e chaga em N no mesmo tempo que o companheiro B, que descansou 40 minutos na viagem. Dizer a distancia MN e quanto durou o trajeto. *(Solução aritmetica e grafica.)*

137*a*. Um móvel B fica a 20 km. de móvel A; na mesma direção, a 30 km. além de B, fica o móvel C. Na mesma hora, os tres móveis partem no mesmo sentido com velocidades de 30 km. para A, 15 km. para B e 20 km. para C. Qual caminho terá percorrido A quando estiver a igual distancia de B e de C? *(Solução aritmetica e grafica.)*

138*a*. Com a velocidade de 6 km. por hora, um viajante vai a pé de Cascadura ao Rio; a 2 km. do ponto de partida, é encontrado por um bonde saido do mesmo ponto que êle, 10 minutos mais tarde. Depois de percorrer mais 11 km 1/3, encontra, pela 2.ª vez, o mesmo bonde, que parou apenas 10 min. no ponto final no Rio. Calcular a distancia do ponto inicial ao ponto final do bonde. *(Solução aritmetica e grafica.)*

139*a*. Um cavaleiro e um ciclista devem ir de Jundiaí a Campinas; o 1.º parte 50 minutos antes do 2.º e percorre 10 km. por hora; o ciclista vence 12 km. por hora e chega em Campinas 5 minutos depois do cavaleiro. Qual é a distancia de Jundiaí a Campinas. *(Solução aritmetica e grafica.)*

140*a*. Um ciclista sai de São Paulo para Jundiaí ás 7 horas da manhã com a velocidade de 15 km. por hora. As 9 h. 30 min. parte de São Paulo um automovel que deve alcançar o ciclista; depois de andar 30 min. com a velocidade de 40 km. por hora, o automovel pára 10 min por causa do motor. De quanto o automovel deve aumentar sua velocidade para alcançar o ciclista como se tivesse corrido sem interrupção a 40 km. por hora? Dando-se o encontro em Jundiaí mesmo, qual é a distancia de Jundiaí a São Paulo? *(Solução aritmetica e grafica.)*

141*a*. Numa cidade, dois pontos A e B, distantes de 5 km., possuem duplo serviço de bondes; tanto em A como em B, sai um bonde cada 5 minutos, com as velocidades de 1 km. em 6 min. no sentido AB, e de 1 km em 5 min. no sentido BA. A's 6 horas da manhã, um viajante, andando 4 km. por hora sai de A, a pé, no mesmo tempo que de A e B parte um bonde. Dizer: 1.º no trajeto AB, quantos bondes o viajante viu correr no mesmo sentido que êle e quantos em sentido

contrário; 2.º a hora de chegada do viajante se andou a pé até B; 3.º qual bonde deveria tomar em caminho para chegar ás 7 horas da manhã. *(Solução aritmetica e grafica.)*

142*a*. Dois móveis partem ás 12 horas de dois pontos A e B distantes de 5 km.; seguem o sentido AB; o que sai de A tem a velocidade uniforme de 2 km. por hora.

1.º Dar a equação do movimento de cada móvel;
2.º Representar graficamente o movimento;
3.º Determinar a hora do encontro por meio do grafico;
4.º Verificar o resultado pelo cálculo;
5.º No grafico, será possivel medir a distancia dos dois móveis, em qualquer momento dado, ás 13 h. 30 min. por exemplo?

143*a*. Dois viajantes partem de São Paulo ás 7 h. para irem a Corrego Fundo, distante de 330 km. mais ou menos; o 1.º toma o trém com uma velocidade média de 45 km. por hora; o 2.º anda de aeroplano, á razão de 90 km. por hora, mas pára ás 9 h. 50 min., por causa do motor; 1 h. 30 min. mais tarde, sóbe num automovel e continua a viagem para Corrego Fundo; qual deve ser a velocidade do automovel para as duas pessôas chegarem juntas a Corrego Fundo? *(Solução aritmetica e grafica.)*

144*a*. Quatro viajantes têm 63 km. a percorrer. Possuem um automovel qua anda 30 km. por hora, mas tendo apenas 2 lugares além do condutor. Combinam que dois tomarão o automovel até certa distancia para acabar a viagem a pé na razão de 4 km. por hora. O automovel voltará buscar os dois outros viajantes, que terão andado a pé na razão tambem de 4 km. por hora. 1.º Onde o automovel deve deixar os 2 primeiros viajantes para que todos cheguem juntos? — 2.º Quantos km. terá feito cada um a pé e de automovel? — 3.º Dizer as horas em que o automovel deixa os primeiros viajantes, toma os segundos e chega ao ponto final. *(Solução aritmetica e grafica.)*

145*a*. Um batalhão anda 5 km. por hora, parando 10 min. após 50 min. de marcha. Sai do quartel ás 5 h. da manhã. Um ciclista de transmitir ordens parte do mesmo quartel ás 8 h. 40 m. com a velocidade de 12 km. por hora. A que horas e a que distancia do quartel alcança o batalhão? O ciclista pára uma hora no ponto de encontro e volta com a velocidade de 15 km. por hora. A que horas e a que distancia do quartel encontrará um 2.º batalhão saido do quartel ás 8 h. 40 min. e andando como o 1º *(Solução aritmetica e grafica.)*

146*a*. Um caminho desce de A para B e tem 880 metros. Dois passeantes partem ás 8 horas de cada um destes dois pontos e vão ao encontro um do outro durante 6 minutos, páram 2 minutos e voltam atrás durante 4 minutos. Depois de parar mais 2 minutos, recomeçam o mesmo exercicio e assim por diante. Sabendo que percorrem 50 m. por minuto quando sóbem e 60 m. quando descem, dizer: 1.º a que horas cada um alcançará e extremidade do caminho; 2.º quando e onde hão de encontrar-se?

Estudar as variações das funções :

147a. $y=2x^2$.

148a. $y=-x^2$.

149a. $y=-2x^2$.

150a. $y=\frac{1}{4}x^2$.

151a. $y=-\frac{1}{4}x^2$.

152a. $y=\frac{2}{x}$.

153a. $y=-\frac{2}{x}$.

154a. $y=\frac{3}{5x}$.

155a. Construir a curva $y=+3x^2$ e a reta $y=-2x+5$. Quais são as abscissas dos seus pontos de interseção?

156a. Construir a curva representada pela equação : $y=\frac{4x+2}{x}$.

157a. Um corpo cai livremente num lugar onde a aceleração da gravidade é $g=980$. Qual é sua velocidade e o espaço percorrido no fim de 3 segundos de queda ?

158a. Quanto tempo leva um corpo para cair livremente de uma altura de 500 m., num lugar onde $g=980$?

159a. Debaixo da pressão de 3 kg. por cm², certa massa gazosa ocupa o volume de 240 dm³ ; que volume ocupará sob a pressão de 8 kg. por cm² ?

QUARTA PARTE

PROGRESSÕES E LOGARITMOS

CAPITULO PRIMEIRO

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

I. Definições.

236. **Progressão.** — *Progressão* é uma serie de termos tais que a razão de cada um ao precedente seja constante. Distinguem-se progressões *aritméticas* e progressões *geométricas*.

237. **Progressão aritmética.** — *Progressão aritmética* é uma série de termos tais que a diferença entre cada um e o precedente seja constante. Essa diferença chama-se *razão* da progressão.

As duas series de números :

$$7,\quad 10,\quad 13,\quad 16,\quad 19,\quad 22,\quad 25 \qquad (1)$$
$$104,\quad 94,\quad 84,\quad 74,\quad 64,\quad 54,\quad 44 \qquad (2)$$

são duas progressões aritméticas.

Na primeira, a razão é $10-7=3$, e na segunda, é $94-104=-10$.

238. **Progressão crescente, decrescente.** — Uma progressão é *crescente* quando sua razão é *positiva* ; é *decrescente* quando sua razão é *negativa*. A progressão (1) é crescente, e (2) é decrescente.

239. **Notações.** — A progressão aritmética formada pelos números a, b, c, d, ... h, k, l, escreve-se :

$$\div a.b.c.d.....h.k.l$$

e lê-se : a está para b, está para c, está para d..., está para h, está para k, está para l. A letra a, representa o primeiro termo ; l, o ultimo ; r, a razão ; n, o numero dos termos e S, a soma dos termos da progressão.

II. Propriedades das progressões aritméticas

240. **Teorema.** — *O último térmo de uma progressão aritmética iguala o primeiro aumentado de tantas vezes a razão quantos termos menos um ha na progressão.*

Seja a progressão de n termos :

$$\div a.b.c.....h.k.l$$

Por definição temos :

$$b=a+r$$
$$c=b+r$$
$$..............$$
$$k=h+r$$
$$l=k+r$$

Somando-se membro a membro essas $n-1$ igualdades, vem :

$$b+c+.....+k+l=a+b+c+.....h+k+r(n-1)$$

Depois de suprimir nos dois membros a quantidade commum $b+c+...+k$, temos :

$$l=a+(n-1)r \qquad (a)$$

241. **Corolários.** — 1.º Se a razão fosse negativa, teriamos :

$$l=a-(n-1)r$$

2º Da fórmula (a) resolvida em relação ás outras letras, tira-se :

$$l=a+(n-1)r \qquad (a)$$
$$a=l-(n-1)r \qquad (b)$$
$$r=\frac{l-a}{n-1} \qquad (c)$$
$$n=1+\frac{l-a}{r} \qquad (d)$$

Essas fórmulas permitem calcular um dos quatro elementos a, l, r, n de uma progressão quando os tres outros estão conhecidos.

242. **Teorema.** — *Em toda progressão aritmética, a soma de dois termos tomados a igual distância dos extremos é igual á soma dos extremos.*

Seja f o termo que tem m termos antes, e i o que tem m termos depois; temos, com evidencia (a) :

$$f=a+mr \qquad (1) \qquad \text{e} \qquad l=i+mr. \qquad (2)$$

Subtraindo a primeira igualdade da segunda, temos :

$$l-f=i-a \quad \text{donde} \quad l+a=i+f.$$

243. **Inserção de meios aritméticos.** — Inserir ou interpolar m meios aritméticos entre a e b, é formar uma progressão de $m+2$ termos cujos extremos sejam a e b.

A razão é dada pela fórmula (c) :

$$r=\frac{l-a}{n-1},$$

na qual é preciso substituir l por b e n por $m+2$. Esta razão é portanto :

$$r=\frac{b-a}{m+1}. \qquad (e)$$

Aplicação. *Interpolar nove meios aritméticos entre* 8 *e* 38.

A progressão procurada terá 11 termos ; o primeiro será 8 e o ultimo 38. A razão é *(e)* :

$$r=\frac{38-8}{9+1}=\frac{30}{10}=3.$$

A progressão é, pois :

$$\div 8.11.14.17.20.23.26.29.32.35.38$$

III. Soma dos termos de uma progressão aritmética.

244. **Teorema.** — *A soma dos termos de uma progressão aritmética é igual á semi-soma dos extremos multiplicada pelo número dos termos.*

Seja a progressão de n termos :

$$\div a.b.c.d.....i.j.k.l$$

Temos :

$$S=a+b+c+d+.....+i+j+k+l,$$

ou

$$S=l+k+j+i+.....+d+c+b+a$$

Somando membro a membro essas duas igualdades, temos :

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+j)+.....+(k+b)+(l+a).$$

Cada um desses n grupos de parêntesis é igual á soma dos extremos (242).

Temos, portanto :

$$2S=(a+l)+(a+l)+.....+(a+l)=(a+l)n,$$

ou

$$S=\frac{(a+l)n}{2}=\left(\frac{a+l}{2}\right)n. \qquad (f)$$

245. **Corolário I.** — Na fórmula

$$S=\left(\frac{a+l}{2}\right)n$$

substituindo l por seu valor (a), temos :

$$S=\frac{[a+a+r(n-1)]n}{2}=\left[a+\frac{r}{2}(n-1)\right]n. \qquad (g)$$

246. **Corolário II.** — As fórmulas (a), (b), (c), (d), (f), (g) estabelecidas para as progressões crescentes, aplicam-se tambem ás progressões decrescentes, com a condição de mudar r em $-r$.

IV. Problemas sobre as progressões aritméticas.

247. **Problema I.** — *Achar a soma dos* n *primeiros números inteiros.*

Estes numeros formam a progressão de n termos :

$$\div 1.2.3.4.5.....n$$

cuja soma é :

$$S=\left(\frac{1+n}{2}\right)n.$$

Exemplo. — A soma dos 100 primeiros números inteiros será

$$S=\left[\frac{1+100}{2}\right]100=5050.$$

248. **Problema II.** — *Qual é a soma dos* n *primeiros números impares?*

Estes numeros impares formam a progressão de n termos :

$$\div 1.3.5.7.9.11...l$$

cuja soma (g) é :

$$S=\left[a+\frac{r}{2}(n-1)\right]n=\left[1+\frac{2}{2}(n-1)\right]n=n^2.$$

Exemplo. — A soma dos 100 primeiros numeros impares será :

$$S=n^2=100^2=10.000.$$

249. **Problema III.** — *Um coronel dispõe de 3321 soldados. Coloca-os em triângulo de modo que a primeira linha tenha 1 soldado, a segunda 2 soldados, a terceira 3, a quarta 4 e assim por diante. Quantas linhas de soldados terá?*

Seja l o número de soldados da ultima linha, l é tambem o número de linhas. A soma dos termos da progressão

$$\div 1.2.3.4.5.6.7....l$$

é :

$$S=\left(\frac{1+l}{2}\right)l.$$

Daí se deduz a equação :

$$\left(\frac{1+l}{2}\right)l=3\,321 \quad \text{ou} \quad l^2+l-6\,642=0,$$

cuja raiz aceitavel é $l=81$. O triângulo terá, pois, 81 linhas.

PROBLEMAS SOBRE AS PROGRESSÕES ARITMETICAS

1665. Formar uma progressão crescente de 8 termos cuja razão seja 10 e o primeiro têrmo 93.

1666. Formar uma progressão decrescente de 8 termos se o primeiro é 1 000 e a razão 75.

1667. Formar uma progressão de 6 termos se o 1.º é $4a+6b$ e a razão $a-b$.

1668. Achar o 7.º termo de uma progressão se o 1.º têrmo é $24a-6b+13$ e a razão $b-4a-2$.

1669. O 1.º têrmo de uma progressão é —50 e a razão 10. Achar o 21º têrmo.

1670. O 1.º termo de uma progressão é 4, o ultimo 94 e a razão 6. Achar o numero dos termos.

1671. Quantos termos tem uma progressão, sabendo que o 1.º é $10x-7y$, o ultimo $3y$, e a razão $y-x$?

1672. O 34º têrmo de uma progressão é 9 e a razão —17. Qual é o 1º têrmo ?

1673. Achar o 1º têrmo de uma progressão na qual o 20º têrmo é $a+b+1$ e a razão $\frac{a}{19}+b$.

1674. Dada a progressão

$$\div 67.61\ldots\ldots 1.$$

calcular o número e a soma dos termos.

1675. Dada a progressão

$$\div(30m-15).(26m-13)\ldots\ldots(2m-1).$$

calcular o número e a soma dos termos.

1676. Na progressão
$\div 197.170\ldots\ldots$

calcular o 10º têrmo e a soma dos 10 primeiros termos.

Achar a soma dos termos de cada uma das progressões seguintes :

1677. $\div 7.15.23\ldots\ldots 111$

1678. $\div 125.120.115\ldots\ldots 5$

1679. $\div 1.2.3.4.5\ldots\ldots 1000$

1680. $\div 2.4.6.8\ldots\ldots 1000$

1681. $\div 1.3.5.7\ldots\ldots 999$

1682. $\div 1.(2+a).\ (3+2a).\ (4+3a)\ldots\ldots(21+20a)$

1683. O 17º têrmo de uma progressão é 2 e a razão —13. Achar o 1.º.

1684. Numa progressão o 1.º têrmo é 37, o último 11 e a soma dos termos 336. Achar o número dos termos e a razão.

As progressões seguintes têm 12 termos ; calcular sua razão.

1685. $\div 23\ldots\ldots 28{,}5.$

1686. $\div 100\ldots\ldots 78.$

1687. $\div a\ldots\ldots a(11n+1).$

1688. $\div na\ldots\ldots a(n-1).$

Calcular a soma dos 10 primeiros termos de cada uma das progressões seguintes :

1689. $\div 25.33\ldots\ldots$

1690. $\div 99{,}90\ldots\ldots$

1691. $\div 11a.\frac{10a}{9}\ldots\ldots$

1692. $\div 1.\frac{3}{2}.2\ldots\ldots$

1693. $\div 25a.23a\ldots\ldots$

1694. $\div \frac{a}{5}.\ \frac{3a}{5}\ldots\ldots$

Inserir 6 meios aritméticos entre os dois números seguintes :

1695. 3, 10.

1696. 20, 195.

1697. $8a-16b$, $a-2b$

1698. $21a-7$, 0.

1699. 1, 4,5.

1700. —10, —38.

1701. $\frac{5a}{4}$, $10a$.

1702. 61, —79.

1703. Dados n, S, r, calcular l e a.

1704. — l, S, n, — a e r.

1705. — l, a, r, — S e n.

1706. — a, r, S, — l e n.

1707. — S, l, r, — n e a.

1708. — r, n, l, — S e a.

1709. — a, l, n, — r e S.

1710. — S, l, a, — r e n.

1711. — S, a, n — r e l.

1712. — a, n, r, — S e l.

1713. Calcular a soma de todos os números pares compreendidos entre 1 045 e 7 351.

1714. Ha quantos múltiplos de 7 entre 1 000 e 10 000 ? Achar sua soma.

1715. Qual é a soma de todos os números de uma taboa de Pytagoras contendo todos os produtos dois a dois dos 10 primeiros números ?

1716. Ha quantos multiplos de 11 menores do que 1 000 ?

1717. Um relógio bate as horas com repetição ; anuncia os quartos por uma pancada, as meias por duas pancadas e os tres quartos por tres pancadas. Quantas pancadas por dia dá esse relógio ?

1718. Se esse relógio batesse as horas sem repetição, e anunciasse apenas as meias horas e por uma pancada só, quantas pancadas daria por dia?

1719. Um coronel dispõe parte de seu regimento num triângulo cheio, colocando um homem na primeira linha, dois na segunda, tres na 3.ª e assim por diante. Forma assim um triângulo de 231 homens. Havia quantas linhas de homens?

1720. Os ângulos de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética. Quais são esses ângulos?

1721. Num octógono convexo, os ângulos estão em progressão aritmética de razão 5º. Achar esse ângulos.

1722. Quantos termos se devem tomar na progressão

$$\div 13.21.29.37.....$$

para que a soma seja 490?

1723. Achar 6 números em progressão aritmética, sabendo que o 1.º desses números é 4,5 e a soma dos termos é 19,50.

1724. Tres operários cavam um poço de 27 metros de fundo. Para o 1.º metro recebem 20$; para o 2.º recebem 23$; para o 3.º 26$, e assim por diante. Quanto receberá cada um, sabendo que depois dos 9 primeiros metros são 3 operários mais, e se acham ainda aumentados de 3 para cavar os 9 ultimos metros?

1725. Achar 4 números em progressão aritmética tais que os dois meios tenham 86 100 por produto, e os extremos 6100.

1726. Tres números em progressão aritmética têm por soma 54, e 5814 por produto. Achar estes números.

1727. Marcam-se 10 pontos numa circumferência e une-se cada um a todos os outros por linhas rétas. Quantas rétas diferentes se traçam assim?

1728. O produto dos dois primeiros e dos dois ultimos termos de uma progressão de 5 termos é 483 021, e a razão é 10. Achar a progressão.

1729. Um criado ganhou 3:350$ em 10 anos. Sabendo que no 1.º ano recebeu 200$ e todos os anos foi aumentado de uma mesma quantia, achar o aumento anual do seu ordenado.

1730. Achar o triângulo retângulo cujos lados são tres números inteiros diferindo de 5.

CAPITULO II

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

I. Definições.

250. **Progressão geometrica.** — *Progressão geométrica* é uma série de termos tais que cada um iguala o precedente multiplicado por uma quantidade constante chamada *razão*.

Representa-se uma progressão geométrica do modo seguinte:

$$\div\div a : b : c : d : .... : h : k : l$$

e designa-se a razão por q.

251. **Progressão crescente, decrescente.** — Uma progresão geométrica é *crescente* quando a razão é superior a 1; é *decrescente* se a razão é menor do que 1.

A progressão:

$$\div\div 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1\,458$$

é crescente, pois que sua razão é $18 \div 6 = 3$;

a progressão

$$\div\div 128 : 32 : 8 : 2 : \frac{1}{2} : \frac{1}{8} : \frac{1}{32}$$

é decrescente, porque sua razão é:

$$\frac{32}{128} = \frac{1}{4}.$$

II. Propriedades das progressões geométricas.

252. **Teorema.** — *Em toda a progressão geométrica, qualquer têrmo é igual ao primeiro multiplicado pela razão elevada a uma potência indicada pelo número de termos que o precedem.*

Seja a progressão de n termos:

$$\div\div a : b : c : d : .... : h : k : l$$

Temos por definição (250):

$$b=aq$$
$$c=bq$$
$$d=cq$$
$$\dots\dots\dots$$
$$k=hq$$
$$l=kq$$

Fazendo o produto membro a membro destas $n-1$ igualdades, temos:

$$bcd\dots kl=abcd\dots hkq^{n-1}$$

e, dividindo os dois membros pelo factor comum $bcd\dots k$, vem:

$$l=aq^{n-1}. \qquad (h)$$

253. **Corolário.** — A fórmula (h) resolvida em relação a uma das quatro letras l, a, q, n, dá as quatro seguintes:

$$(h) \qquad l=aq^{n-1}, \qquad q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}. \qquad (j)$$

$$(i) \qquad a=\frac{l}{q^{n-1}}, \qquad q^{n-1}=\frac{l}{a}. \qquad (k)$$

254. **Aplicações.** — 1.º *Achar o 7.º têrmo da progressão*

$$\div 3:9:27\dots\dots$$

Temos (h)

$$l=aq^{n-1}=3.3^6=3^7=2187.$$

2º *Achar o primeiro têrmo de uma progressão cuja razão é 2, o ultimo têrmo 1280 e o numero dos têrmos 8.*

A formula (i) dá

$$a=\frac{l}{q^{n-1}}=\frac{1280}{2^7}=\frac{1280}{128}=10.$$

3º *Achar a razão da progressão de 9 têrmos se o primeiro é 2 e o ultimo 781250.*

A formula (j) dá

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}=\sqrt[8]{\frac{781\,250}{2}}=\sqrt[8]{390\,625}=\sqrt[4]{625}=\sqrt{25}=5.$$

4º *Achar o numero dos têrmos de uma progressão, se o primeiro têrmo é 4, o ultimo 2916, e a razão 3.*

A fórmula (k), que não se póde resolver inteiramente sem empregar logaritmos, dá:

$$3^{n-1}=\frac{2916}{4}=729.$$

A potência de 3 que iguala 729 é 3^6; de sorte que temos:

$$3^{n-1}=3^6\text{ ; donde } n-1=6 \text{ e } n=7.$$

255. **Teorema.** — *Em toda a progressão geométrica o produto de dois têrmos tomados a igual distância dos extremos é igual ao produto dos extremos.*

Seja a progressão:

$$\div a:b:c:\dots:d:\dots:i:\dots h:k:l.$$

Consideremos o termo d que tem m termos antes, e o termo que tem m termos depois. Temos:

$$d=aq^m \quad \text{e} \quad iq^m=l.$$

Fazendo-se o produto destas duas igualdades, vem:

$$diq^m=alq^m \quad \text{ou} \quad di=al.$$

256. **Inserção de meios geométricos.** — Inserir ou interpolar m meios geométricos entre a e b, é formar uma progressão geométrica de $m+2$ têrmos, sendo a o primeiro, e o último b.

A razão desta progressão será dada pela fórmula (j) na qual se faz $n=m+2$, $a=a$, e $l=b$; vem:

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}. \qquad (l)$$

Aplicação. — Interpolar 3 meios geométricos entre 11 e 14 526.

A razão da progressão será (l):

$$q=\sqrt[4]{\frac{14\,256}{11}}=6.$$

Teremos, portanto, como progressão procurada:

$$\div 11:11\times 6:11\times 6^2:11\times 6^3:14\,256,$$

ou

$$\div 11:66:396:2376:14256.$$

III. Produto e soma dos termos de uma progressão geométrica.

257. **Teorema.** — *O produto dos têrmos de uma progressão geométrica é igual á raiz quadrada do produto dos extremos elevado a uma potência indicada pelo numero dos têrmos.*

Seja a progressão de n têrmos :

$$\div a : b : c : d : .... . i : j : k : l.$$

temos :

$$P = a \times b \times c \times d \times ... \times i \times j \times k \times l,$$

ou

$$P = l \times k \times j \times i \times ... \times d \times c \times b \times a.$$

Fazendo o produto destas duas igualdades, temos :

$$P^2 = al \times bk \times cj \times di \times ... \times di \times cj \times bk \times al.$$

Mas cada um dos n factores al, bk, cj,.... é igual ao producto dos extremos (255); portanto, temos :

$$P^2 = al \times al \times ... \times al \times al = (al)^n = a^n l^n;$$

donde :

$$P = \sqrt{a^n l^n}.$$

Aplicação. — *Achar o produto* $7 \times 21 \times 63 \times .... . \times 567$.

Calculemos primeiro o numero dos têrmos desta progressão. A fórmula (k)

$$q^{n-1} = \frac{l}{a},$$

dá

$$3^{n-1} = \frac{567}{7} = 81 = 3^4;$$

donde

$$n - 1 = 4 \text{ e } n = 5.$$

Temos, pois :

$$P = \sqrt{7^5 \times 567^5} = 992\,436\,543.$$

258. **Teorema.** — *A soma dos têrmos de uma progressão geometrica se obtem fazendo o produto do último têrmo pela razão, diminuindo esse produto do primeiro têrmo, e dividindo o resto pela razão menos um.*

Seja a progressão :

$$\div a : b : c : d : .... : k : l.$$

Temos :

$$S = a + b + c + d + ... + k + l. \qquad (1)$$

Multiplicando os dois membros por q, esta equação dá :

$$Sq = aq + bq + cq + dq + ... + kq + lq.$$

Mas, por definição, temos :

$$aq = b, \quad bq = c, \quad cq = d, \; .... \; kq = l$$

e a igualdade precedente vem a ser, pois :

$$Sq = b + c + d + ... + l + lq. \qquad (2)$$

Subtraindo (1) de (2), temos :

$$Sq - S = lq - a;$$

donde :

$$S(q - 1) = lq - a,$$

ou emfim :

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}. \qquad (m)$$

259. **Corolário I.** — Na fórmula precedente (m), substituindo l por aq^{n-1}, vem :

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right).$$

260. **Corolário II.** — Quando a progressão é decrescente, temos $q < 1$ e $q^n < 1$; portanto, os dois têrmos da fração $\frac{q^n - 1}{q - 1}$ são negativos; mudando os sinais, temos :

$$S = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right).$$

Temos tambem :

$$S = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

261. **Teorema.** — *A soma dos têrmos de uma progressão geométrica decrescente cujo número dos têrmos é infinito, é igual ao primeiro têrmo dividido pelo excesso da unidade sobre a razão.*

A soma dos têrmos de uma progressão geométrica qualquer (258) é :

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

Se a progressão é decrescente, esta soma dá :

$$S = \frac{a - lq}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{lq}{1 - q}.$$

Como os têrmos da progressão vão decrescendo indefinidamente, o último termo l tende cada vez mais para zero ; portanto, no limite, temos :

$$S=\frac{a}{1-q}-\frac{0\times q}{1-q}=\frac{a}{1-q}. \qquad (n)$$

Aplicação. — *Achar a soma dos têrmos da progressão decrescente ao infinito*

$$\div\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{16}:\frac{1}{32}:\frac{1}{64}:\ldots\ldots$$

Temos (261)

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{1/2}{1-1/2}=\frac{1/2}{1/2}=1.$$

IV. Resolução de problemas.

262. **Problema I**. — *Achar o 9º têrmo da progressão :*

$\div 81 : 27 : 9 :\ldots.$

Temos :

$$l=aq^{n-1}=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^{8}=3^4\times\frac{1}{3^8}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}.$$

263. **Problema II**. — *Achar a soma dos têrmos da progressão precedente.*

Teremos :

$$S=\frac{lq-a}{q-1}=\frac{a-lq}{1-q}=\frac{81-\frac{1}{81}\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\left(81-\frac{1}{243}\right)\frac{3}{2}=121\frac{40}{81}.$$

264. **Problema III**. — *Achar o limite da fração periódica* 0,547547547.....

Designando por S a geratriz da fração, temos :

$$S=\frac{547}{1\,000}+\frac{547}{1\,000^2}+\frac{547}{1\,000^3}+\ldots..$$

O segundo membro é uma progressão geométrica decrescente, com um numero infinito de têrmos (261) ; temos, portanto :

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{547/1000}{1-1/1000}=\frac{547}{1000-1}=\frac{547}{999}.$$

265. **Problema IV**. — *Um viajante, que faz 1 legua por hora, saiu 6 horas antes de outro viajante que o segue com uma velocidade tripla. Quantas leguas percorrerá o segundo antes de alcançar o primeiro?*

Emquanto o segundo viajante percorre as 6 leguas de adiantamento, o primeiro, que anda 3 vezes menos depressa, percorre 6/3 de legua, ou 2 leguas.

Emquanto o segundo percorre essas 2 leguas, o primeiro percorre 2/3 de legua.

Emquanto o segundo percorre esses 2/3 de legua, o segundo percorre 2/9 de legua ; e assim por diante.

De modo que o segundo, para alcançar o primeiro, será obrigado a percorrer um numero de leguas representado por :

$$6+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\ldots..$$

A soma dos termos, em numero infinito, desta progressão é :

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{6}{1-\frac{1}{3}}=\frac{6\times3}{3-1}=\frac{18}{2}=9.$$

Resp. : 9 leguas.

PROBLEMAS SOBRE AS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

1731. O 11º têrmo de uma progressão geométrica é 32 e a razão ½. Achar o primeiro têrmo.

1732. O 13º têrmo de uma progressão é 20 480 e a razão 2. Qual é a progressão ?

1733. O 10º têrmo de uma progressão é b^{4m-11} e a razão b^{m+1}. Achar o 1.º têrmo.

1734. Achar o 1.º têrmo de uma progressão na qual o 12º têrmo é $-b^{22}$ e a razão $-b^{4}$.

1735. Qual é o 9º têrmo de uma progressão na qual o 1.º é 9 e a razão 1/3 ?

1736. Achar o 10º têrmo de uma progressão quando o 1.º é 3 e razão 2.

Formar uma progressão de 8 têrmos, sabendo que :

1737. O primeiro é 2 048 e a razão $\frac{1}{2}$.

1738. O primeiro é 4 e a razão 3.

1739. O primeiro é a^2 e a razão a^5.

1740. O primeiro é 1 e a razão $-a^2$.

1741. O primeiro é a^{20} e a razão $1/a$.

1742. Qual é o 7º têrmo de uma progressão na qual o 1º é $\frac{1}{46\,656}$ e a razão 6?

Achar o número dos têrmos das 6 progressões seguintes :

1743. $\div 5:\ldots\ldots:12\,005$; razão 7.

1744. $\div 2\,048:\ldots\ldots:16$; razão ½.

1745. $\div 0,3:\ldots\ldots:0,000\,0003$; razão 0,1.

1746. $\div b^3:\ldots\ldots:-b^{21}$; razão $-b^2$.

1747. $\div \frac{1}{b}:\ldots\ldots:-\frac{1}{b^{23}}$; razão $-\frac{1}{b^2}$

1748. $\div \frac{3}{4}:\ldots\ldots:\frac{1}{324}$; razão $\frac{1}{3}$

1749. Achar o número dos têrmos de uma progressão na qual o último têrmo é $\frac{1}{243}$, a razão $\frac{1}{3}$, e o primeiro têrmo 3.

1750. Qual é a soma dos têrmos de uma progressão cujos extremos são 28 672 e 7, e a razão $\frac{1}{4}$.

Achar a soma dos têrmos de cada uma das progressões seguintes :

1751. $\div 3:12:\ldots\ldots:49\,152$.

1752. $\div \frac{1}{10}:\frac{1}{10^2}:\ldots\ldots:\frac{1}{10^8}$.

1753. $\div 1:x:\ldots\ldots:x^8$.

1754. $\div a^2:a^4:\ldots\ldots:a^{12}$.

1755. $\div a^5:a^4:\ldots\ldots:\frac{1}{a^4}$.

1756. $\div x:x^3:\ldots\ldots:x^{2n+1}$.

1757. $\div \frac{1}{x}:\frac{1}{x^2}:\ldots\ldots:\frac{1}{x^n}$.

Achar o produto dos 6 primeiros têrmos de cada uma das progressões seguintes :

1758. $\div 2:2^3:2^5:\ldots\ldots$

1759. $\div \frac{1}{2^{10}}:\frac{1}{2^8}:\frac{1}{2^6}:\ldots\ldots$

1760. $\div \frac{1}{x^3}:\frac{1}{x^2}:\frac{1}{x}:\ldots\ldots$

1761. $\div 81:9:1:\ldots\ldots$

1762. $\div a^3:a^5:a^7:\ldots\ldots$

1763. $\div 2,5:-5:10:\ldots\ldots$

1764. $\div 1:a:a^2:\ldots\ldots$

1765. $\div \frac{b}{a}:\frac{b^3}{a^3}:\frac{b^5}{a^5}:\ldots\ldots$

1766. Achar a razão de uma progressão de 7 têrmos cujos extremos são 3 e 192.

1767. Interpolar 7 meios proporcionais entre 32 e 8 192.

1768. Interpolar 5 meios geométricos entre 3 e 12 288 ; dar a progressão formada e a sua razão.

1769. Que progressão se obtem inscrindo 4 meios geométricos entre 32 e 7 776 ?

1770. Interpolar 8 meios geométricos entre 1 e 10 ; dar os 4 primeiros têrmos da progressão resultante, e a sua razão.

Achar a soma de todos os têrmos de cada uma das progressões ilimitadas seguintes :

1771. $\div 5:\frac{15}{4}:\frac{45}{16}:\frac{135}{64}:\ldots\ldots$

1772. $\div \frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{16}:\ldots\ldots$

1773. $\div 8:4:2:1:\frac{1}{2}:\ldots\ldots$

1774. $\div \frac{1}{9}:\frac{1}{9^2}:\frac{1}{9^3}:\ldots\ldots$

1775. $\div 26,46:\ 2,646:\ 0,2646:\ 0,02646:\ldots\ldots$

1776. $\div 1:-\frac{1}{3}:\frac{1}{9}:-\frac{1}{27}:\ldots\ldots$

Achar a soma dos têrmos de cada uma das séries ilimitadas seguintes :

1777. $1-\frac{1}{9}+\frac{1}{81}-\frac{1}{729}+\ldots\ldots$

1778. $\frac{3}{5}-\frac{9}{25}+\frac{27}{125}-\frac{81}{625}+\ldots\ldots$

1779. $x+\frac{x}{3}+\frac{x}{9}+\frac{x}{27}+\frac{x}{81}+\ldots\ldots$

1780. $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1\,000}+\frac{3}{10\,000}+\ldots\ldots$

1781. Calcular a expressão

$$\frac{a+a^3+a^5+a^7+\ldots\ldots}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^5}+\frac{1}{a^7}+\ldots\ldots}$$

tomando 20 têrmos em cada progressão.

1782. Calcular a soma dos n primeiros termos da série

$$1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\ldots\ldots$$

1783. Calcular a soma dos 20 primeiros têrmos da progressão

$$\frac{b}{a}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^5}{a^5}+\frac{b^7}{a^7}+\ldots\ldots$$

Calcular a soma dos 8 primeiros têrmos de cada uma das duas progressões seguintes :

1784. $\frac{4}{5}+1+\frac{5}{4}+\frac{25}{16}+\dots\dots$

1785. $x+\frac{x}{1-y}+\frac{x}{(1-y)^2}+\frac{x}{(1-y)^3}+\dots\dots$

Achar a fração geratriz de cada uma das frações periódicas seguintes :

1786. 0,522 522 522.....

1787. 0,4444444.....

1788. 0,9999999.....

1789. 0,01 01 01 01.....

1790. 4,23 23 23.....

1791. 0,12 3333.....

1792. 47,23 12 12 12.....

1793. 1,378 99999.....

1794. Repartir 665 em 3 partes positivas que estejam em progressão geométrica, e de modo que a 3.ª exceda a 1.ª de 600.

1795. Achar os 4 ângulos de um quadrilátero, sabendo que formam uma progressão geométrica e o 3.º vale 9 vezes o 1.º.

1796. Achar uma progressão geométrica de 5 têrmos cuja razão seja a metade do 2.º têrmo, e tal que os 2 primeiros tenham 10 por soma.

1797. A soma das arestas de um paralelipípedo rectângulo é 10 m. 40. Achar estas arestas sabendo que formam uma progressão geométrica e o sólido tem 216 dm³ por volume.

1798. Num concurso, se um mestre désse 2 bons pontos ao 12º aluno, 6 ao 11º, 18 ao 10º, 54 ao 9º, etc. ; quantos pontos teria de dar ao todo ?

1799. Para cavar um poço de 30 m. de fundo, um operário propõe fazer o trabalho, recebendo 2$ para o 1.º metro, 4$ para o 2.º, 8$ para o 3.º, e assim por diante. Caso se aceitasse a proposta, quanto custaria o poço ?

CAPITULO III

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Para o seguinte ponto do programa : *Estudo da função exponencial*, ver *Algebra* F.T.D., *curso superior*, numero 418 e seguintes.

I. Definições.

266. **Definição dos logaritmos.** — *Logaritmos* são os números de uma progressão aritmética começando por 0, que correspondem têrmo a têrmo aos números de uma progressão geométrica começando por 1.

Sejam as duas progressões :

$$\div 1 : 3 : 3^2 : 3^3 : 3^4 : 3^5 \dots$$
$$\div 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\dots \qquad (1)$$

Qualquer número da segunda progressão é o logaritmo do número correspondente da primeira. Assim 0 é o logaritmo de 1 ; 1 é o logaritmo de 3 ; 2 é o de 3^2; 3 é o de 3^3, etc.

267. **Extensão da definição precedente.** — Inserindo muitíssimos meios geométricos entre os termos consecutivos da progressão geométrica, um número dado será igual a um desses meios ou dêle diferirá tão pouco como quizermos ; de sorte que a progressão geométrica encerra implicitamente todos os números inteiros.

A inserção de outros tantos meios aritméticos entre os termos consecutivos da progressão aritmética dá os logaritmos dos meios geométricos ; logo, qualquer meio aritmético é o logaritmo do meio geométrico de mesma ordem.

Completando como segue as duas progressões

$$\dots : \frac{1}{3^3} : \frac{1}{3^2} : \frac{1}{3} : 1 : 3 : 3^2 : 3^3 : 3^4 : 3^5 : \dots$$
$$\dots -3. -2. -1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\dots$$

vê-se que as frações têm logaritmos negativos.

268. **Sistemas de logaritmos.** — Sistema de logaritmos é o conjunto de duas progressões, uma geométrica começando por 1, e outra, aritmética começando por 0. Essas duas progressões definem um sistema de logaritmos.

É evidente que ha uma infinidade de sistemas de logaritmos, porque podemos escolher qualquer progressão geométrica começando por 1, e associar-lhe qualquer progressão aritmética começando por 0.

269. **Base de um sistema de logaritmos.** — *Base* de um sistema de logaritmos é o número que tem a unidade por logaritmo. A base é sempre um número positivo.

No sistema

$$\div 1 : 5 : 5^2 : 5^3 : 5^4 : 5^5 : \dots$$
$$\div 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\dots$$

a base é 5, porque $log\ 5=1$.

270. **Observação.** — *Os números negativos não têm logaritmos.* — Com efeito, como a base é positiva, todas suas potências são positivas ; portanto, todos os números da progressão geométrica são positivos.

II. Propriedades dos logaritmos.

271. **Teorema.** — *O logaritmo de um produto é igual á soma dos logaritmos dos factores.*

Seja o sistema de logaritmos :

$$\div\div 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 : a^7 : a^8 : \ldots$$
$$\div 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8\ldots..$$

no qual qualquer número da progressão geométrica tem seu expoente por logaritmo

Sejam ainda os 3 números :

$$A=a^3,\quad B=a^5,\quad C=a^7.$$

O produto dessas 3 igualdades membro a membro é :

$$ABC=a^{3+5+7}.$$

Nessa igualdade, ABC ou o seu igual a^{3+5+7} tem por logaritmo $3+5+7$; portanto, temos :

$$log\,(ABC)=3+5+7=log A+log B+log C.$$

Exemplo :

$$Log\,(2\times3\times4\times5)=log\,2+log\,3+log\,4+log\,5.$$

272. **Teorema.** — *O logaritmo de um quociente é igual ao logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor.*

Seja Q o quociente de A por B ; temos a identidade :

$$A=BQ \quad \text{ou} \quad log\ A=log(BQ).$$

Mas, o teorema precedente dá :

$$log\ BQ=log\ B+log\ Q;$$

portanto :

$$log\ A=log\ B+log\ Q.$$

Donde vem :

$$log\ Q=log\ A-log\ B.$$

Sendo Q igual a $\frac{A}{B}$, temos emfim :

$$log\ \frac{A}{B}=log\ A-log\ B.$$

Exemplo : $$Log\ \frac{69}{11}=log\ 69-log\ 11.$$

273. **Teorema.** — *O logaritmo de uma potência de um número é igual ao logaritmo deste número multiplicado pelo grâu da potência.*

Por exemplo, seja A^4 ; temos :

$$A^4=A\times A\times A\times A;$$

donde :

$$log\ A^4=log\ A+log\ A+log\ A+log\ A=4\ log\ A,$$

e, em geral :

$$log\ A^m=m\ log\ A.$$

Exemplo : $$log\ 6^7=7\ log\ 6.$$

274. **Corolário I.** — *O logaritmo do infinito é o infinito.*

E' uma consequencia da igualdade

$$log\ a^n=n\ log\ a.$$

Como a é a base, temos

$$log\ a=1.$$

Portanto :

$$log\ a^n=n.$$

Se n se torna infinito, a^n se torna tambem infinito, e podemos escrever

$$log\,\infty=\infty.$$

275. **Corolário II.** — *O logaritmo de 0 é igual* a $-\infty$.

Temos

$$log\ \frac{1}{n}=log\ 1-log\ n=0-log\ n=-log\ n.$$

Se n se torna infinito, $1/n$ se torna nulo, e podemos escrever

$$log\ 0=-log\,\infty=-\infty.$$

276. **Teorema.** — *O logaritmo da raiz de um número é igual ao logaritmo deste número, dividido pelo indice da raiz.*

Devemos ter, por exemplo :

$$\log\sqrt[7]{11}=\frac{\log 11}{7}$$

Com efeito, façamos :

$$x=\sqrt[7]{11}$$

e elevemos os dois membros desta igualdade á 7^a potência, teremos :

$$x^7=11$$

Tomando os logaritmos dos dois números, teremos (Nº 273) :

$$7\log x=\log 11 \quad \text{ou} \quad \log x=\frac{\log 11}{7}$$

Substituindo x por seu valor $\sqrt[7]{11}$, temos emfim :

$$\log\sqrt[7]{11}=\frac{\log 11}{7}$$

EXEMPLOS :

$$1^o \ \log\sqrt{20}=\frac{\log 20}{2}.$$

$$2^o \ \log\sqrt[3]{13}=\frac{\log 13}{3}.$$

III. Logaritmos vulgares.

277. **Definição.** — Logaritmos *vulgares* ou de *Briggs* são os logaritmos dados pelo sistema de base 10 :

$$\ldots : 10^{-4} : 10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : \ldots$$
$$\ldots . -4.\ -3.\ -2.\ -1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots$$

Do exame desse sistema, deduzem-se varias consequências :

1º *O expoente de uma potencia de 10 é o logaritmo desta potência :*

Assim

$$\log 10^3=3, \quad \log 10^{-2}=-2 \text{ ; etc.}$$

2.º *As potências de 10 têm logaritmos inteiros.*

Temos com efeito :

$$\log 10=1 \text{ ; } \log 10^2=2 \text{ ; } \log 10^3=3, \text{ etc.}$$

3.º *As frações decimais têm logaritmos negativos.*

Com efeito :

$$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000},$$

e $\log 10^{-3}=\log\frac{1}{1000}=-3.$

4.º *Os números compreendidos entre 1 e 10 têm logaritmos compreendidos entre 0 e 1.*

Em geral, os números compreendidos entre 10^m *e* 10^{m+1}*, têm logaritmos compreendidos entre* m *e* m+1.

5.º *Só as potências de 10 têm logaritmos inteiros ; os outros números têm por logaritmos números fracionários.*

278. **Caracteristica, mantissa.** — *Caracteristica* é a parte inteira de um logaritmo, e *mantissa* é sua parte decimal.

279. **Teorema.** — *A caracteristica do logaritmo de um número maior do que 1 é tantas unidades quantos algarismos menos um ha na parte inteira do número.*

Assim o logaritmo de 45 674 terá a caracteristica 4. Com efeito, como este número está compreendido entre 10^4 et 10^5, seu logaritmo fica comprehendido entre 4 e 5 : sua caracteristica é 4.

280. **Teorema.** — *A caracteristica do logaritmo de uma fração decimal é tantas unidades negativas quantos zeros mais um ha entre a virgula e o primeiro algarismo significativo da fração decimal.*

Seja a fração decimal :

$$N=0{,}000\ 004\ 567\ 89=\frac{456789}{10^{11}}.$$

Tomemos os logaritmos dos dois membros, teremos :

$$\log N=\log 456789-\log 10^{11}=\log 456789-11 \quad (1)$$

Mas o numero 456789 tem o logaritmo compreendido

entre 5 e 6 ; seja f a mantissa deste logaritmo, podemos escrever :

$$log\ 456\,789 = 5 + f;$$

portanto, a equação (1) dá :

$$log\ N = 5 + f - 11 = -6 + f = \bar{6} + f. \quad *$$

Exemplos :

1º $log\ 0{,}0035$ tem $\bar{3}$ por caracteristica.

2º $log\ 0{,}000\ 000\ 000\ 82$ tem $\overline{10}$ por carasteristica.

281. **Teorema.** — *Multiplicando ou dividindo um número por 10^n, a mantissa do logaritmo desse número não muda, mas a caracteristica é aumentada ou diminuida de n.*

Seja :

$$log\ A = 6{,}567\ 8342.$$

1º Multipliquemos A por 10^5, teremos :

$$log\ (A \times 10^5) = log\ A + log\ 10^5 = 6{,}567\ 8342 + 5 = 11{,}567\ 8342.$$

2º Dividamos, pelo contrário, A por 10^5, teremos :

$$log\ \frac{A}{10^5} = log\ A - log\ 10^5 = 6{,}567\ 8342 - 5 = 1{,}567\ 8342.$$

Exemplos :

1º $log\ 254 = 2{,}404\ 8337$;
2º $log\ 2540 = 3{,}404\ 8337$;
3º $log\ 2{,}54 = 0{,}404\ 8337$;
4º $log\ 0{,}00254 = \bar{3}{,}404\ 8337$.

IV. Logaritmos das frações.

282. **Teorema.** — *O logaritmo de uma fração póde se escrever debaixo de duas formas diferentes.*

Seja a fração $\frac{2}{900}$; temos :

$$log \frac{2}{900} = log\ 2 - log\ 900 = 0{,}301\ 0300 - 2{,}954\ 2425.$$

Para efectuar a subtração, temos dois modos :

* $\bar{6}$ significa -6 e lê-se menos 6.

1.º *Tirar o minuendo do subtraendo e dar ao resto o sinal —.*

Temos assim :

$$log \frac{2}{900} = (0{,}301\ 0300 - 2{,}954\ 2425) = -2{,}653\ 2125.$$

2.º *Augentar o minuendo de uma ou varias unidades, do modo que a subtração seja possivel ; depois dar ao resto como caracteristica negativa o número de unidades acrescentadas ao minuendo.*

Com efeito, temos :

$$0{,}301\ 0300 - 2{,}954\ 2425 = 3{,}301\ 0300 - 2{,}954\ 2425 - 3$$
$$= 0{,}346\ 7875 - 3 = \bar{3}{,}346\ 7875.$$

283. **Corolário.** — *Um logaritmo inteiramente negativo póde ser substituido por um logaritmo equivalente que tem somente a caracteristica negativa.*

Para essa transformação aplica-se esta regra :

284. **Regra.** — *Para passar de um logaritmo inteiramente negativo ao logaritmo equivalente que têm só a caracteristica negativa, subtrai-se este logaritmo do número imediatamente superior, e depois dá-se como caracteristica á diferença este número inteiro encimado do sinal —.*

Exemplos :

$$-4{,}738\ 5213 = (5 - 4{,}738\ 5213) - 5 = 0{,}261\ 4787 - 5$$
$$= \bar{5}{,}261\ 4787.$$

285. **Outra regra pratica.** — 1.º *Mudar o sinal da caracteristica e acrescentar-lhe —1 ; 2.º subtrair de 9 cada algarismo da mantissa salvo o último que se subtrai de 10.*

286. **Regra para a transformação inversa.** — *Para tornar inteiramente negativo um logaritmo que tem só a caracteristica negativa, subtrai-se a mantissa da caracteristica, e dá-se ao resto o sinal—.*

Exemplo :

$$\bar{5}{,}261\ 4811 = -5 + 0{,}261\ 4811 = -(5 - 0{,}261\ 4811)$$
$$= -4{,}738\ 5189.$$

V. Problemas resolvidos.

287. **Problema I.** — *Desenvolver as expressões seguintes :*

1º $log\ a^2b^3c$; 2º $log\ \frac{a^2b}{c^3}$; 3º $log \sqrt{a^3b^2}$; 4º $log\ \frac{a^2\sqrt{b^5}}{\sqrt{b^3c^5}}$.

Podemos escrever :

1º $\log a^2b^3c = \log a^2 + \log b^3 + \log c = 2 \log a + 3 \log b + \log c.$

2º $\log \dfrac{a^2b}{c^3} = \log a^2 + \log b - \log c^3 = 2 \log a + \log b - 3 \log c.$

3º $\log \sqrt[5]{a^3b^2} = \dfrac{1}{5} \log a^3b^2 = \dfrac{1}{5}(\log a^3 + \log b^2) = \dfrac{3 \log a + 2 \log b}{5}.$

4º $\log \dfrac{a^2\sqrt[3]{b^5}}{\sqrt{b^3c^5}} = \log (a^2\sqrt[3]{b^5}) - \log\sqrt{b^3c^5} = \log a^2 + \dfrac{\log b^5}{3} - \dfrac{\log b^3c^5}{2},$

ou ainda :

$$\log \frac{a^2\sqrt[3]{b^5}}{\sqrt{b^3c^5}} = 2 \log a + \frac{5 \log b}{3} - \frac{3 \log b + 5 \log c}{2}.$$

288. **Problema II.** — *Que indica a expressão*

$$\log a + 4 \log b - \frac{4 \log c}{3} ?$$

Temos :

1º $\quad 4 \log b = \log b^4;$

2º $\quad \log a + 4 \log b = \log ab^4;$

3º $\quad 4 \log c = \log c^4;$

4º $\quad \dfrac{4 \log c}{3} = \dfrac{\log c^4}{3} = \log\sqrt[3]{c^4};$

Portanto :

$$\log a + 4 \log b - \frac{4 \log c}{3} = \log ab^4 - \log\sqrt[3]{c^4} = \log \frac{ab^4}{\sqrt[3]{c^4}}.$$

289. **Problema III.** — *Transformar a expressão log 0,0047.*
Temos :

$$\log 0{,}0047 = \log \frac{47}{10^4} = \log 47 - \log 10^4 = \log 47 - 4.$$

290. **Problema IV.** — *Sabendo que :*

$$\log 3 = 0{,}477\ 1213 \quad \text{e} \quad \log 6 = 0{,}778\ 1513$$

calcular a expressão :

$$\log \frac{3^2.2^3.\sqrt{6}}{\sqrt[3]{18}}.$$

Temos logo :

$$\log 2 = \log \frac{6}{3} = \log 6 - \log 3 = 0{,}301\ 0300.$$

e depois :

$$\log \frac{3^2.2^3.\sqrt{6}}{\sqrt[3]{18}} = \log 3^2 + \log 2^3 + \log\sqrt{6} - \log\sqrt[3]{18}.$$

Mas podemos escrever :

1º $\log 3^2 = 2 \log 3 = 2 \times 0{,}477\ 1213 = 0{,}954\ 2426.$

2º $\log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \times 0{,}301\ 0300 = 0{,}903\ 0900.$

3º $\log\sqrt{6} = \dfrac{1}{2} \log 6 = \dfrac{0{,}778\ 1513}{2} = 0{,}389\ 0757.$

4º $\log\sqrt[3]{18} = \dfrac{1}{3}\log 18 = \dfrac{1}{3}\log(3 \times 6) = \dfrac{1}{3}(0{,}477\ 1213 + 0{,}778\ 1513)$
$= 0{,}418\ 4242.$

Temos portanto :

$$\log \frac{3^2.2^3.\sqrt{6}}{\sqrt[3]{18}} = 0{,}954\ 2426 + 0{,}903\ 0900 + 0{,}389\ 0757 - 0{,}418\ 4242$$
$$= 1{,}827\ 9841.$$

291. **Problema V.** — *Achar a característica do logaritmo de cada um dos números seguintes :*

1.º 0,00004521 ; 2.º 123456789

1.º Como o número 0,00004521 tem 4 zeros entre a vírgula e o primeiro algarismo significativo, seu logaritmo tem $\bar{5}$ como característica.

2.º Como o número inteiro 123456789 tem 9 algarismos, a característica de seu logaritmo contem 8 unidades.

292. **Problema VI.** — *Sabendo que :*

$$\log 2 = 0{,}301\ 0300 \quad \text{e} \quad \log 3 = 0{,}477\ 1213,$$

pôr debaixo de duas formas diferentes o logaritmo da expressão $\dfrac{2^3}{3^4}$.

Temos com evidência :

$$\log \frac{2^3}{3^4} = \log 2^3 - \log 3^4 = 3 \log 2 - 4 \log 3$$
$$= 3 \times 0{,}301\ 0300 - 4 \times 0{,}477\ 1213,$$

ou ainda :

$$\log \frac{2^3}{3^4} = 0{,}903\ 0900 - 1{,}908\ 4852.$$

Esta diferença iguala :

$$-(1{,}908\ 4852 - 0{,}903\ 0900) = -1{,}005\ 3952.$$

Para obter a segundo forma do logaritmo, acrescentemos e tiremos 2 ao logaritmo precedente, teremos :

$$2 - 1{,}005\ 3952 - 2 = 0{,}994\ 6048 - 2 = \bar{2}{,}994\ 6048.$$

Portanto, temos :

$$\log \frac{2^3}{3^4} = -1{,}005\,3952 = \bar{2}{,}994\ 6048.$$

293. **Problema VII.** — *Tendo* $\log x = \log a$, *que relação existe entre* x *e* a?

Dois números iguais têm mesmo logaritmo, e reciprocamente ; então, se $\log x = \log a$, é preciso tambem que $x = a$.

294. **Problema VIII.** — *Resolver o sistema seguinte :*

$$\log x + \log y = 2\ ; \qquad \log x - \log y = 0.$$

Somando membro a membro as duas equações, temos :

$$2 \log x = 2 \quad \text{ou} \quad \log x = 1\ ;$$

donde :

$$x = 10.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos :

$$2 \log y = 2 \quad \text{ou} \quad \log y = 1;$$

portanto :

$$y = 10.$$

Temos, pois :

$$x = y = 10.$$

EXERCICIOS SOBRE AS PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Qual é a base de cada um dos dois sistemas seguintes :

1800. ..... : 5^{-2} : 5^{-1} : 1 : 5 : 5^2 : 5^3 : 5^4 : .....
..... : -2 . -1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . .....

1801. ..... : 3^{-2} : 3^{-1} : 1 : 3 : 3^2 : 3^3 : 3^4 : .....
..... : -2 . -1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 .....

No sistema

..... : 5^{-2} : 5^{-1} : 1 : 5 : 5^2 : 5^3 : 5^4 : 5^5 : .....
..... -2 . -1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . .....

achar o logaritmo de cada um dos numeros seguintes

1802. 625
1803. 15625
1804. 1/3125
1805. 5^{-4}
1806. $1/5^4$
1807. 1/125

Desenvolver as expressões seguintes :

1808. $\log (5 \times 6 \times 11)$
1809. $\log 5^3$
1810. $\log \frac{1}{3}$
1811. $\log (6^4 \times 2^3)$
1812. $\log \frac{8 \times 9}{11}$
1813. $\log \frac{5^2}{4^3}$
1814. $\log \frac{3^7 \times 5^2}{43}$
1815. $\log \left(\frac{1}{5a}\right)^2$
1816. $\log \frac{4^2 - a^2}{\sqrt{2} - a}$
1817. $\log \sqrt{2}$
1818. $\log \sqrt[3]{5}$
1819. $\log \sqrt[3]{3^4}$
1820. $\log \frac{5}{\sqrt{3}}$
1821. $\log \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$
1822. $\log \frac{6^4}{7^3}$
1823. $\log (5^2 - 3^2)$
1824. $\log \frac{abc}{de}$
1825. $\log \left(\frac{ab}{c}\right)^5$
1826. $\log (\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[5]{5})$
1827. $\log (\sqrt[3]{4^2 \times 5^3})$
1828. $\log (\sqrt{5} \times \sqrt[3]{6} \times \sqrt[4]{7})$
1829. $\log \frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{5}}$
1830. $\log \frac{54}{3\sqrt[3]{4^2}}$
1831. $\log (\sqrt{2})^3$
1832. $\log (\sqrt[3]{2})^2$
1833. $\log \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{5}}\right)$.
1834. $\log 0{,}23$
1835. $\log 0{,}0047$

Que indicam as expressões seguintes ?

1836. $\log a + \log b$
1837. $\log a - \log b$
1838. $2 \log a$
1839. $5 \log b$
1840. $4 (\log a - \log b)$
1841. $-\log a$
1842. $2 \log a - 3 \log b$
1843. $3 \log a + 4 \log b$
1844. $\frac{\log a}{2}$
1845. $\frac{\log a + \log b}{2}$
1846. $\frac{3 \log a}{5}$
1847. $1 - \log a$
1848. $2 + 3 \log a$
1849. $\frac{3 \log a^4 + 5 \log b^3}{4}$

Transformar os logaritmos seguintes em logaritmos equivalentes com mantissas positivas:

1850. —4,39 208
1851. —7,58 246
1852. —0,27 321
1853. —2,58 937
1854. —0,13 383
1855. —1,16 711
1856. —4,11 001
1857. —0,01 072

Tornar inteiramente negativos os logaritmos seguintes:

1858. $\bar{4}$,39 872
1859. $\bar{1}$,78 965
1860. $\bar{2}$,29 783
1861. $\bar{3}$,43 210
1862. $\bar{7}$,98 731
1863. $\bar{7}$,00 002
1864. $\bar{1}$,10 155
1865. $\bar{3}$,86 617
1866. $\bar{5}$,61 725
1867. $\bar{6}$,00 234
1868. $\bar{1}$,99 982
1869. $\bar{1}$,00 021

EXERCICIOS SOBRE OS LOGARITMOS VULGARES

Sabendo que

$$\log 2 = 0{,}301\ 0300$$
$$\log 3 = 0{,}477\ 1213$$
$$\log 5 = 0{,}698\ 9700$$

calcular as expressões seguintes:

1870. $\log 6$
1871. $\log 10$
1872. $\log 4$
1873. $\log 9$
1874. $\log 16$
1875. $\log 30$
1876. $\log 300$
1877. $\log 20$
1878. $\log 200000$
1879. $\log 5000$
1880. $\log 36$
1881. $\log 900$
1882. $\log 144$
1883. $\log \frac{10}{3}$
1884. $\log \frac{72}{25}$
1885. $\log \sqrt{2}$
1886. $\log \sqrt{6}$
1887. $\log \sqrt{5}$
1888. $\log \sqrt[3]{50}$
1889. $\log \sqrt[3]{3600}$
1890. $\log \frac{1}{60}$
1891. $\log 64$
1892. $\log 0{,}24$
1893. $\log 0{,}6$
1894. $\log 0{,}004$
1895. $\log 0{,}00003$
1896. $\log 2{,}5$
1897. $\log 2/3$
1898. $\log 2/5$
1899. $\log 6/5$
1900. $\log 3/5$
1901. $\log 5/3$

1902. $\log 15/2$
1903. $\log \sqrt[4]{2^3 \times 3^2 \times 5^3}$
1904. $\log \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{3^3}}$
1905. $\log \sqrt{\frac{3}{4}}$
1906. $\log \sqrt[5]{\frac{5}{6}}$
1907. $\log (15^2 \times \sqrt{15})$
1908. $\log \sqrt{\sqrt[3]{6}}$
1909. $\log \sqrt{5\sqrt{3\sqrt{2}}}$

Conhecendo $\log 2 = 0{,}301\ 0300$ e $\log 6 = 0{,}778\ 1513$, calcular as expressões seguintes:

1910. $\log 5$
1911. $\log 3$
1912. $\log 12$
1913. $\log 24$
1914. $\log 36$
1915. $\log 8$
1916. $\log 18$
1917. $\log 144$
1918. $\log 72$
1919. $\log 1/3$
1920. $\log 0{,}3$
1921. $\log 0{,}006$
1922. $\log \sqrt{15}$
1923. $\log \sqrt[3]{36}$
1924. $\log 15^5$
1925. $\log \sqrt[5]{144}$
1926. $\log \frac{1}{72}$
1927. $\log \frac{1}{144}$

Achar em logaritmos vulgares as características dos números seguintes:

1928. 1,2
1929. 45
1930. 263 456
1931. 2543
1932. 654 321 891
1933. 647,25
1934. 1,125
1935. 0,07
1936. 0,000 0451
1937. $\sqrt{4567698}$
1938. 0,002
1939. 0,235
1940. 0,000 4567
1941. 0,000 000 785 89
1942. 0,000 042 367

Sabendo que $\log 67\,852 = 4{,}831\ 5627$, achar:

1943. $\log 6{,}7852$
1944. $\log 678{,}52$
1945. $\log 0{,}000\,678\,52$
1946. $\log 0{,}000\,000\,678\,52$
1947. $\log 67{,}852^3$
1948. $\log 0{,}67852^2$
1949. $\log 0{,}67852$
1950. $\log 678\,5200$
1951. $\log 67852^2$
1952. $\log 67852^3$
1953. $\log \sqrt{67852}$
1954. $\log \sqrt{678{,}52}$

CAPITULO IV

EMPREGO DAS TABOAS DE LOGARITMOS

I. Preliminares.

295. **Definições.** — *Taboa* de logaritmos é a coleção dos logaritmos dos números inteiros, desde a unidade até um número dado.

As taboas mais empregadas são as grandes taboas de 7 decimais de Calet e de Dupuis, e as pequenas taboas de Lalande et de Dupuis de 7 e de 5 décimais.

296. **Disposição das taboas de 5 decimais de Dupuis.** — Estas taboas contêm os logaritmos dos números inteiros de 1 até 10 000. Damos abaixo a página 18.ª destas taboas.

18. Logaritmos dos números de 1 a 10 000.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
580	76 343	350	358	365	373	380	388	395	403	410
1	418	425	433	440	448	455	462	470	477	485
2	492	500	507	515	522	530	537	545	552	559
3	567	574	582	589	597	604	612	619	626	634
4	641	649	656	664	671	678	686	693	701	708
5	716	723	730	738	745	753	760	768	775	782
6	790	797	805	812	819	827	834	842	849	856
7	864	871	879	886	893	901	908	916	923	930
8	938	945	953	960	967	975	982	989	997	*004
9	77 012	019	026	034	041	048	056	063	070	078
590	085	093	100	107	115	122	129	137	144	151
1	159	166	173	181	188	195	203	210	217	225
2	232	240	247	254	262	269	276	283	291	298
3	305	313	320	327	335	342	349	357	364	371
4	379	386	393	401	408	415	422	430	437	444
5	452	459	466	474	481	488	495	503	510	517
6	525	532	539	546	554	561	568	576	583	590
7	597	605	612	619	627	634	641	648	656	663
8	670	677	685	692	699	706	714	721	728	735
9	743	750	757	764	772	779	786	793	801	808
600	815	822	830	837	844	851	859	866	873	880
1	887	895	902	909	916	924	931	938	945	952
2	960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*025
3	78 032	039	046	053	061	068	075	082	089	097
4	104	111	118	125	132	140	147	154	161	168
5	176	183	190	197	204	211	219	226	233	240
6	247	254	262	269	276	283	290	297	305	312
7	319	326	333	340	347	355	362	369	376	383
8	390	398	405	412	419	426	433	440	447	453
9	462	469	476	483	490	497	504	512	519	526
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5800" = 1°36'40" S = $\bar{6}$,685 52 T. 69
5900 = 1 38 20 52 69
6000 = 1 40 0 51 70

Do seu exame, deduzem-se-as observações seguintes :

1.º Cada pagina contem 300 números, porque se em seguida a cada um dos 30 números da coluna N, se coloca sucessivamente cada um dos 10 algarismos :

0 1 2 3 4 9

escritos na primeira linha horizontal, formam-se 300 números de 4 algarismos. Assim, por exemplo, com o número 581 formam-se

5810 5811 5813 5819

2.º A taboa contem somente as mantissas dos logaritmos ; as caracteristicas se obtêm logo pelo exame dos números dados (279-280).

3.º A mantissa do logaritmo de um dos 300 números se compõe de 5 algarismos : os dois primeiros são os dois algarismos isolados 76, ou 77, ou ainda 78 da coluna 0, e na esquerda desta coluna ; os tres outros compõem-se de um dos números de 3 algarismos que formam as colunas.

0 1 2 3 4 9

Assim a mantissa do logaritmo de 5954 compõe-se primeiro du número isolado 77 da coluna 0, e do número 481 situado na interseção de linha que contem 595 e da coluna 4. Essa mantissa é 77481, e temos :

$$log\ 5954 = 3,77481.$$

4.º Quando os tres últimos algarismos de uma mantissa são marcados de um asterisco, os dois primeiros são os dois algarismos isolados da coluna 0, colocados na linha situada abaixo do asterisco.

Assim as mantissas dos logaritmos dos 4 números

6 026 6 027 6 028 6 029

são respetivamente

78003 78010 78017 78025,

e não

77 003 77 010 77 017 77 025.

As taboas servem para resolver dois problemas :

1.º *Dado qualquer número, achar seu logaritmo.*
2.º *Dado certo logaritmo, achar o número correspondente.*

II. Primeiro problema.

Dado qualquer número, achar seu logaritmo.

297. Distinguiremos dois casos : o número dado, tornado inteiro, é *inferior* ou *superior* a 10 000.

298. **Primeira caso.** — *Achar o logaritmo de um número que, tornado inteiro, é inferior a* 10 000.

Aplica-se a regra seguinte :

299. **Regra.** — *Para se achar o logaritmo de um número menor de que* 10 000, *basta lêr a mantissa nas taboas e dar-lhe a caracteristica segundo as regras dos n.os* 279 *e* 280.

Aplicações. — 1.º *Achar log* 456.

Uma simples leitura dá 658 9648 como mantissa de *log* 456 ; sabemos (279) que a caracteristica é 2.

Logo :

$$log.\ 456 = 2,658\ 9648.$$

Podemos observar que as mantissas de *log* 456 e *log* 4 560 são idênticas (281).

2.º *Qual é o logaritmo de* 2 789 000 ?

Sabemos que as mantissas dos logaritmos de 2 789, 27 890, 278 900, 2 789 000, etc., são idênticas (281).

Portanto, a mantissa do logaritmo procurado será a de *log* 2 789 ou 445 4485, que se acha nas taboas.

A caracteristica é 6 (n.º 279).

Logo :

$$log\ 2\ 789\ 000 = 6,445\ 4485.$$

3.º *Achar o logaritmo de* 0,0547.

Sabemos que as mantissas dos logaritmos de 0,0547 ; 0,547 ; 5,47 ; 54,7 ; 547 ; 5470, etc., são identicas (281).

A mantissa de *log* 0,0547 será, pois a de *log* 547 ou de *log* 5 470 ou 737 9873 que se acha nas taboas.

A caracteristica é $\overline{2}$ (n.º 280).

Logo :

$$log\ 0,0547 = \overline{2},737\ 9873.$$

300. **Segundo caso.** — *Achar o logaritmo de um número que, tornado inteiro, é superior a* 10 000.

Aplica-se a regra seguinte :

301. **Regra.** — *Para se achar o logaritmo de um número de mais de quatro algarismos :* 1.º *multiplica-se ou divide-se o número dado por uma potência de* 10 *tal, que a parte inteira seja um número inteiro* n *de quatro algarismos ; seja então* f *a fração decimal que acompanha* n ;

2.º *Procura-se nas taboas a mantissa de* n ;

3.º *A essa mantissa acrescenta-se o produto* d×f, d *sendo a diferença tabular dos logaritmos dos dois números que compreendem* n+f ;

4.º *Dá-se a essa mantissa a caracteristica conveniente, segundo os teoremas dos n.os* 280 *e* 279.

Aplicações. — 1.º *Achar o logaritmo de* 45,67806.

Procuraremos a mantissa de *log* 4567,806 (n.º 281).

A mantissa de *log* 4567,806 iguala a de *log* 4567 mais uma fração sensivelmente igual aos 0,806 da diferença entre *log* 4568 e *log* 4 567.

Ora as taboas dão 659 6310 como mantissa de *log* 4 567 e 659 7261 como mantissa do *log* 4 568.

A diferença *d* será, pois :

$$d = 3,659\ 7261 - 3,659\ 6310 = 951 \text{ decimos milionesimos.}$$

Portanto :

$$log\ 4567,806 = 3,659\ 6310 + 0,806 \times 951 \text{ decimos milionesimos.}$$

ou

$$log\ 4567,806 = 3,659\ 6310 + 0,000\ 0767 = 3,659\ 7077.$$

A mantissa do número dado é pois, 659 7077 ; sua caracteristica é 1 n.º 279).

Logo :

$$log\ 45,67806 = 1,659\ 7077.$$

2.º *Qual é o logaritmo de* 756 432,8 ?

Procuremos a mantissa de *log* 7 564,328 (n.º 281) ; teremos :

$$log\ 7\ 564,328 = log\ 7564 + 0,328 \times d.$$

As taboas dão

$$log\ 7\ 564 = 3,878\ 7515 \text{ e } d = 574 \text{ decimos milionesimos.}$$

Portanto :

$$log\ 7\ 564,328 = 3,878\ 7515 + 574 \times 0,328 \text{ dec. milionesimos,}$$

ou

$$log\ 7\ 564,328 = 3,878\ 7515 + 0,000\ 0189 = 3,878\ 7704.$$

A mantissa de *log* 756 432,8, é pois 878 7704 ; sua caracteristica é 5 (n.º 279).

Logo :

$$log\ 756\ 432,8 = 5,878\ 7704.$$

3.º *Achar*

$$\log\ 0{,}000452873$$

As taboas dão :

$\log 4528 = 3{,}655\ 9064$ e $d = 959$ decimos milionesimos.

Portanto :

$\log 4\ 528{,}73 = 3{,}655\ 9064 + 959 \times 0{,}73$ centesimos milesimos ou

$$\log\ 4\ 528{,}73 = 3{,}655\ 9064 + 0{,}000\ 0700 = 3{,}655\ 9764.$$

A mantissa do *log* 0,000452873 é pois 655 9764 ; sua caracteristica é $\bar{4}$ (n.º 280).

Logo :

$$\log\ 0{,}000\ 452\ 873 = \bar{4}{,}655\ 9764.$$

III. Segundo problema.

302. **Problema geral.** — *Achar o número que corresponde a um logaritmo dado.*

Para se resolver este problema aplica-se a regra seguinte :

303. **Regra.** — Para se achar o número correspondente a um logaritmo dado, distinguem-se dois casos :

1.º **Caso.** — *A* mantissa do *log* dado se acha nas taboas.

O número correspondente é o número procurado, com a condição de multiplica-lo ou dividi-lo por uma potência de 10, tal que a parte inteira tenha um algarismo a mais do que as unidades da caracteristica, se ela fôr positiva (279) ; *se ela fôr negativa, é preciso dividir o número achado por uma potência de 10, tal que entre a virgula e o primeiro algarismo significativo haja tantos zeros menos um quantas unidades negativas ha na caracteristica* (280).

2.º **Caso.** — A mantissa do *log* dado não se acha nas taboas.

Procura-se a mantissa do número imediatamente inferior e toma-se o número correspondente. A este número acrescenta-se uma fração $\frac{m}{n}$ *que se reduz a decimais* (m *é a diferença entre a mantissa dada e a imediatamente inferior, e* n, *a diferença entre as duas mantissas que compreendem a mantissa dada).*

Depois multiplica-se ou divide-se o número obtido por uma potência de 10, *tal que a parte inteira tenha um algarismo a mais do que as unidades da caracteristica se ela fôr positiva* (279) ; *se fôr negativa, é prsciso pôr entre a virgula e o primeiro algarismo significativo do número achado tantos zeros menos um quantas unidades negativas ha na caracteristica* (280, 281).

Aplicações. — 1.º *Achar o número que tem por logaritmo* 5,873 0298.

A mantissa deste logaritmo se acha nas toboas ; dá 7 465 como número correspondente.

A caracteristica 5 indica que o número tem 6 algarismos na parte inteira (n.º 279). O número procurado é pois 746 500.

2.º *Achar o número cujo logaritmo é* 1,941 7797.

A mantissa 941 7797 não se acha exatamente nas taboas. A mantissa inferior mais proxima é 941 7598 com uma diferença tabular de 497 e 8 745 como número correspondente.

A este último número, è preciso acrescentar a fração

$$\frac{m}{n} = \frac{9417797 - 9417598}{497} = \frac{199}{497} \doteq 0{,}4.$$

O número correspondente á mantissa dada é, pois, 8 745,40

A caracteristica 1 indica que o número procurado tem 2 algarismos na parte inteira (279).

E' portanto : 87,4540.

3.º *Qual é o número que tem por logaritmo* $\bar{4}$,645 7268?

As taboas não contêm a mantissa 645 7268, a mantissa inferior mais próxima é 645 7169, e o número correspondente é 4 423. As taboas dão tambem :

$$m = 6457268 - 6457169 = 99$$
$$n = 6458151 - 6457169 = 982$$

Portanto, o número correspondente á mantissa dada é

$$4423 + \frac{99}{982} = 4\ 423 + 0{,}1 = 4\ 423{,}1.$$

A caracteristica $\bar{4}$ indica que ha 3 zeros entre a virgula e o primeiro algarismo significativo (280).

O número correspondente é, pois :

0,000 44231.

4º *Achar o número que corresponde ao logaritmo negativo* —4,578 9228.

Tornemos positiva a mantissa deste logaritmo ; teremos (284)

$$-4{,}578\ 9228 = (5 - 4{,}578\ 9228) - 5 = \bar{5}{,}421\ 0772$$

e achamos um exercício semelhante aos precedentes. O número procurado é 0,000 026 368.

IV. Resolução de alguns problemas.

304. **Problema I.** — *Calcular, por meio dos logaritmos, o produto* 17×124 *e dar o logaritmo final.*

Temos :

$$\log(17\times124)=\log 17+\log 124$$

Ora, as taboas dão :

$$\log\ 17=1,230\ 4489$$
$$\log\ 124=2,093\ 4217$$

Donde $\log(17\times124)=3,323\ 8706$

Resta achar o número correspondente a este logaritmo As taboas dão exatamente 2 108.

1ª *Resp.*: Produto = **2108** ; 2ª *Resp.*: *log* do prod. = **3,323 8706.**

Problema II. — *Fazer a soma dos dois logaritmos*

$$5,563\ 4241 \quad \text{e} \quad \overline{3},976\ 5423$$

Escrevem-se estes *log* um debaixo do outro de modo que as caracteristicas se correspondam :

$$\begin{array}{r} 5,563\ 4241 \\ \overline{3},976\ 5423 \\ \hline 3,539\ 9664 \end{array}$$

Depois, faz-se a soma como para dois números ordinários :

$1+3=4$; $4+2=6$; $2+4=6$; $4+5=9$; $3+6=9$; $6+7=13$;

escreve-se 3 e vai 1 para a reserva ;

$$1+5+9=15;$$

escreve-se 5 e vai 1 para a reserva;

$$1+5-3=3;$$

A soma procurada é 3,539 9664.

Resp. : **3,539 9664.**

Problema III. — *Somar os dois logaritmos*

$$\overline{5},476\ 9341 \quad \text{e} \quad -2,459\ 8227$$

Temos (Nº 284) :

$$-2,4598227=(3-2,4598227)-3=\overline{3},540\ 1773$$

depois faz-se a soma como no número precedente

$$\begin{array}{r} \overline{5},476\ 9341 \\ \overline{3},540\ 1773 \\ \hline \overline{7},017\ 1114 \end{array}$$

Depois de somar as duas mantissas, vai 1 para a reserva, e diz-se :

$$1-5-3=\overline{7}$$

A soma é pois :

Resp. : **$\overline{7}$,017 1114.**

Problema IV. — *Efetuar a subtração seguinte :*

$$\overline{3},273\ 6745-\overline{4},659\ 7122$$

Temos :

$$\overline{3},273\ 6745-\overline{4},659\ 7122=-3+0,273\ 6745+4-0,659\ 7122$$

Essa diferença vem a ser :

$$4-3+0,273\ 6745-0,659\ 7122=1,273\ 6745-0,659\ 7122$$
$$=0,613\ 9623.$$

Resp. : **0,613 9623.**

Problema V. — *Multiplicar por* 5 *o logaritmo* $\overline{1}$,986 4712.

Temos :

$$\overline{1},986\ 4712\times5=(-1+0,986\ 4712)5=-5+4,932\ 3560$$
$$=\overline{1},932\ 3560.$$

Resp. : **$\overline{1}$,932 3560.**

Problema VI. — *Dividir por* 3 *o logaritmo* $\overline{4}$,578 9236.

Acrescenta-se — 2 á caracteristica para torna-la divisivel por 3. Temos :

$$\frac{\overline{4},5789236}{3}=\frac{\overline{6},5789236+2}{3}=\frac{2,5789236-6}{3}=0,8596412-2$$
$$=\overline{2},8596412.$$

Resp. : **$\overline{2}$,859 6412.**

Problema VII. — *Achar o produto* 1254,56×0,012735 *e dar o logaritmo final.*

Seja P este produto, temos :

$$\log P=\log 1254,56+\log 0,012735$$

As taboas dão

$$\begin{aligned} log\ 1\,254{,}56 &= 3{,}098\ 4915 \\ log\ 0{,}012735 &= \overline{2}{,}104\ 9989 \\ \hline log\ P &= 1{,}203\ 4904 \end{aligned}$$

Portanto :

Resp. : P=**15,97632.**

Problema VIII. — *Achar o quociente de 123,72 por 45 973,45.*

Seja Q o quociente procurado, temos :

$$Q=\frac{123{,}72}{45\,973{,}45}=\frac{12\,372}{4597345}$$

donde :

$$log\ Q=log\ 12\,372-log\ 4\,597\,345$$

As taboas dão :

$$\begin{aligned} log\ 12372 &= 4{,}092\ 43\text{[illegible]} \\ log\ 4597345 &= 6{,}662\ 50\text{[illegible]}1 \\ \hline log\ P &= \overline{3}{,}429\ 932\text{[illegible]} \end{aligned}$$

As taboas dão como número correspondente 0,002691129

Resp. Q=**0,002 691 129.**

Problema IX. — *Calcular*

$$N=\frac{17^2\times 0{,}4521^3\times\sqrt{4\,564}}{11\sqrt[3]{427}}$$

Temos :

$$log\ N=log\ 17^2+log\ 0{,}4521^3+log\sqrt{4564}-log\ 11-log\sqrt[3]{427}$$

Ora as taboas dão :

$$\begin{aligned} log\ 17^2 &= 2\ log\ 17=2\times 1{,}2304489=2{,}460\ 8978 \\ log\ 0{,}4521^3 &= 3\ log\ 0{,}4521=3\times\overline{1}{,}6552345=\overline{2}{,}965\ 7035 \\ log\sqrt{4564} &= \frac{1}{2}\ log\ 4564=\frac{1}{2}\times 3{,}6593456=1{,}829\ 6728 \\ -log\ 11 &= -1{,}0413927=\overline{2}{,}958\ 6073 \\ -log\sqrt[3]{427} &= -\frac{1}{3}\ log\ 427=-\frac{1}{3}\times 2{,}6304279=\overline{1}{,}123\ 1907 \end{aligned}$$

Somando, achamos : $log\ N=1{,}338\ 0721$

Portanto :

Resp. : N=**21,78071.**

Problema X. — *Achar o número dos termos da progressão*

$$\div 2:6:18:\ldots\ldots:4374.$$

Da fórmula

$$l=aq^{n-1},$$

tira-se

$$log\ l=log\ a+(n-1)\times log\ q;$$

donde

$$n=\frac{log\ q+log\ l-log\ a}{log\ q}=\frac{log\ 3+log\ 4374-log\ 2}{log\ 3}$$

As taboas dão :

$$n=\frac{0{,}4771213+3{,}6408788-0{,}3010300}{0{,}4771213}=8$$

Resp. : 8 **termos.**

Problema XI. — *Conhecendo-se o primeiro têrmo 1/243, o último têrmo 6561, e o número 14 dos termos de uma progressão geometrica, calcular a razão.*

A fórmula

$$l=aq^{n-1}$$

$$log\ l=log\ a+(n-1)log\ q,$$

donde se tira :

$$log\ q=\frac{log\ l-log\ a}{n-1}=\frac{log\ 6561-log\ 1/243}{13}$$

Ora

$$\begin{aligned} log\ 6561 &= 3{,}816\ 9700 \\ -log\ 1/243 &= 2{,}385\ 6063 \end{aligned}$$

Portanto

$$log\ q=\frac{log\ 6561-log\ 1/243}{13}=\frac{6{,}2025763}{13}=0{,}477\,1212$$

E as taboas dão como número correspondente :

Resp. : $q=$**3**

Problema XII. — *Resolver a equação* $5^x=20$.

Tomando os logaritmos, vem :

$$x\ log\ 5=log\ 20=log(5\times 4)=log\ 5+log\ 4$$

donde

$$x=\frac{log\ 5+log\ 4}{log\ 5}=1+\frac{log\ 4}{log\ 5}=1+\frac{0{,}6020600}{0{,}6989700}.$$

O valor de x é 1,861 353

Resp. : $x=$**1,861 353.**

304a. Régua logarítmica. — *Régua logarítmica* ou *régua de calculo* é um instrumento de uns 30 centimetros de comprimento, fundado sobre o principio dos logaritmos (n.º 271), que dá logo os resultados de uma multiplicação, de uma divisão, de uma elevação ao quadrado, de uma raiz quadrada.

Compõe-se de 2 partes : uma fixa AB, a *régua*, e outra movel, *ab*, a *reguinha* ou *corrediça*. A reguinha leva um botão *b*, que serve de puxador (fig. 41).

A *escala principal* encontra-se na reguinha *ab* e na parte superior AB da régua ; compõe-se de 2 gruaduações iguais e e juxtapostas, com riscos altos marcados 1, 2, 3, 4, ..., 8, 9, 10, 2, 3, ...8, 9, 10, nos lugares proporcionais aos logaritmos de 1, 2, 3, 4, ..., 8, 9, 10, 20, 30, ..., 80, 90, 100.

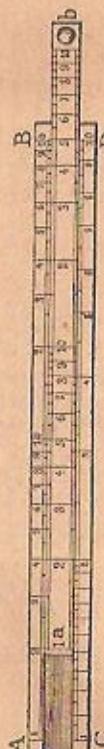
Por exemplo o intervalo entre 1 e 2 é proporcional ao log. de 2 ; entre 1 e 3, é proporcional ao log. de 3 ; entre 1 e 5, é proporcional ao log. de 5 ; entre 1 e 7 (0), é proporcional ao log. de 70.

Além destas divisões, a régua e a reguinha levam ainda outras, um pouco menos altas ; por exemplo, o intervalo entre 1 e 2, entre 2 e 3, entre 3 e 4, etc., é subdividido em 10 partes iguais ; de modo que a distância da origem 1 a cada um destes riscos representa os log. de 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; ... ; 9,9 ; ... ; 20 ; 21 ; 22 ; ... ; 99 ; 100.

Depois, estas subdivisões, conforme o seu tamanho, foram ainda divididas, por traços menores, em 5 ou 2 partes iguais, de modo que os intervalos entre a origem 1 (ou base) e cada destes traços menores, sejam proporcionais aos log. de 1,02 ; 1,04 ; 1,06 ; 1,08 ; 1,10 ; 1,12 ; ... ; 9,95 ; 10 ; 10,2 ; 10,4 ; ... ; 99,5 ; 100.

Fig. 41.

Deste modo, as escalas da régua e da reguinha equivalem a uma táboa de logaritmos dos números inteiros de 1 até 100, com interpolação dos décimos e centésimos destes inteiros.

Baseando-se sobre o principio dos log. (n.º 271) : *o log. de um produto é igual á soma dos log. dos factores*, este instrumento dá logo, por simples leitura, o produto e o quociente de dois termos.

1.º Produto de 2 factores. — Eis o modo de multiplicar 2×3 ; para isso : 1.º corre-se a reguinha *ab* até que a base 1 esteja bem na frente du multiplicando 2 da régua ; 2.º procura-se o multiplicando 3 sobre a reguinha e encontra-se o produto sobre a régua, bem na frente do multiplicador 3 da reguinha : aqui, é 6.

Igualmente para multiplicar 2×5, é preciso : 1.º correr a reguinha até a base 1 estar bem na frente do multiplicando 2 sobre a régua ; 2.º procurar o multiplicador 5 sobre a reguinha e ler o numero 10 que lhe corresponde sobre a régua : é o produto procurado.

2.º Divisão. — Eis o modo de dividir 8÷4 ; para isso ; 1.º procura-se o dividendo 8 sobre a régua AB e o divisor 4 sobre a reguinha e corre-se esta até os dois números se corresponderem ; 2.º o quociente 2 é o número da régua que corresponde á origem 1 da reguinha.

Igualmente, para dividir 18÷9, é preciso : 1.º sobre a régua procurar o dividendo 18, e sobre a reguinha, o divisor 9 e fazê-los corresponder ; 2.º acima da base 1 da reguinha ler o número correspondente 2 sobre a régua ; é o quociente procurado.

3.º Quadrados e raizes quadradas. — Na sua parte inferior, a régua leva uma escala CD, graduada apenas de 1 até 10, de modo proporcional a log. 1, log. 2, log. 3, ... log. 10, contados os segmentos a partir da origem 1. O tamanho total desta escala CD, dividida em 10 partes, é o mesmo que o tamanho das escalas AB e *ab* da regua e da reguinha, divididas em 100 partes.

Deste modo, cada intervalo desta escala inferior CD vale 2 vezes o comprimento do intervalo correspondente na escala de cima AB ou na escala da reguinha *ab*.

Por isso, os números desta escala inferior são as raizes quadradas dos números correspondentes da escala de cima e reciprocamente.

Por isso, a 2 na escala inferior corresponde 4 na escala superior ;
a 3 — — — 9 — — —
a 4 — — — 16 — — —
a 7 — — — 49 — — —
a 9 — — — 81 — — —
a 10 — — — 100 — — —

E reciprocamente.

Este é o motivo porque a escala inferior leva o nome de *escala dos quadrados* ou melhor *das raizes quadradas*.

EXERCICIOS SOBRE OS LOGARITMOS

Achar, por meio das taboas, os logaritmos dos números seguintes:

1955. 345
1956. 3450
1957. 34,50
1958. 5,436
1959. 39654.
1960. 2458,72
1961. 7834
1962. 6470
1963. 52,78429
1964. 1447,25
1965. 8,837
1966. 2560,56
1967. 103555
1968. 3247,75
1969. 670925
1970. 4938265
1971. 56792,74
1972. 843,5725
1973. 9,758496
1974. 50809
1975. 168579
1976. 241,10
1977. 684278
1978. 37002
1979. 0,2509067
1980. 12467,25
1981. 0,0456
1982. 0,23542
1983. 39,64
1984. 0,002578
1985. 0,00016585
1986. 2,83568
1987. 132,629
1988. 3,15245
1989. 0,26305
1990. 0,00316295
1991. 0,009583
1992. 1,4527
1993. 0,003
1994. 0,000002
1995. 0,003003
1996. 0,30103
1997. 4,78621
1998. 0,0045272
1999. 0,0000056823
2000. $\pi=3,141592$
2001. $\sqrt{2}$
2002. $\sqrt{3}$
2003. $1/\sqrt{2}$
2004. $1/\sqrt{3}$
2005. $1/\pi$
2006. $g=9,8088$
2007. $1/g$
2008. 360; 180; 90
2009. $\frac{17}{60}$
2010. $49\frac{4}{7}$
2011. $\frac{130}{16}$
2012. $168\frac{5}{9}$
2013. $\frac{7}{30}$
2014. 241 3/5
2015. 536 5/8
2016. 324 7/90
2017. 5/7
2018. 8/11
2019. 17/23
2020. 37 2/3
2021. 1/47
2022. 0,025/63
2023. 64 5/8
2024. 60/1123
2025. 1/17893
2026. 249 3/4
2027. 520 8/9
2028. 125/126
2029. 0,125/0,250
2030. $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$
2031. $\sqrt{1/3}$
2032. $\sqrt{1/13}$

Dar, debaixo de duas formas diferentes, os logaritmos das frações seguintes:

2033. 0,436
2034. 0,7348
2035. 0,3629
2036. 0,6735
2037. 0,56849
2038. 0,0043212
2039. 0,000056472
2040. 0,00000056
2041. 0,237
2042. 0,4568
2043. 0,03649
2044. 0,0073482
2045. 0,000549072
2046. 1/13
2047. 1/19
2048. 34/55
2049. 75/89
2050. 237/735
2051. 457/86320
2052. 5,34/78463
2053. 0,07/45872000
2054. 17/21,453
2055. 0,43/566132
2056. 0,7/0,95
2057. 0,00058321/23
2058. 471/3728

Achar os números correspondentes aos logaritmos seguintes:

2059. 1,982 2712
2060. 2,075 5470
2061. 2,292 2561
2062. 3,080 2656
2063. 0,903 0900
2064. 2,824 7765
2065. 3,859 4385
2066. 2,879 6692
2067. 0,990 2500
2068. 4,999 9566
2069. 3,570 1178
2070. 4,579 2495
2071. 3,627 4376
2072. 5,135 1008
2073. 0,549 6652
2074. 6,987 1186
2075. 2.357 2715
2076. 2,007 1287
2077. 1,892 3819
2078. 1,788 6731
2079. 1,155 3542
2080. 0,345 7559
2081. 0,602 0600
2082. 3,942 1172
2083. 0,434 2974
2084. 0,006 4660
2085. 0,010 7239
2086. 0,014 9403
2087. 0,497 1509
2088. 6,535 0107
2089. 0,534 6986
2090. 4,895 7208
2091. 2,799 5666
2092. 5,342 8785
2093. 3,002 5461
2094. 6,726 3498
2095. 1,488 4591
2096. 2,567 3393
2097. 0,887 0318
2098. 0,733 2374
2099. 0,672 5227
2100. 3,826 0748

Achar a fração decimal correspondente a cada um dos logaritmos seguintes:

2101. —4,382 7470
2102. —0,261 8698
2103. —1,685 8167
2104. —0,014 2503
2105. —1,373 9472
2106. —2,457 3862
2107. —3,764 9010
2108. —0,994 6050
2109. $\bar{1},365\ 7313$
2110. $\bar{1},738\ 1302$
2111. $\bar{2},314\ 0780$
2112. $\bar{1},985\ 7407$
2113. $\bar{4},185\ 7404$
2114. $\bar{4},736\ 2770$
2115. $\bar{1},234\ 7703$
2116. $\bar{2},733\ 4461$
2117. $\bar{4},200\ 3579$
2118. $\bar{3},639\ 0081$
2119. $\bar{2},450\ 5108$
2120. $\bar{4},243\ 7076$
2121. —3,814 2596
2122. $\bar{4},185\ 7404$
2123. $\bar{3},863\ 7235$
2124. $\bar{4},684\ 5671$
2125. $\bar{1},357\ 6109$
2126. $\bar{1},445\ 5575$
2127. $\bar{3},784\ 6102$
2128. —1,132 5561
2129. —3,574 7218
2130. —2,354 6662
2131. —0,785 2197
2132. —1,931 0056
2133. —4,224 6954
2134. $\bar{1},784\ 3177$
2135. $\bar{3},568\ 4599$
2136. $\bar{1},965\ 8317$
2137. —3,452 1146
2138. —0,777 1275
2139. —2,887 5626
2140. $\overline{11},301\ 0300$
2141. $\bar{7},477\ 1213$
2142. $\bar{2},602\ 0600$
2143. $\bar{1},492\ 5090$
2144. $\bar{4},252\ 5618$
2145. $\bar{2},433\ 2737$

Por meio dos logaritmos, efetuar as operações seguintes e dar o logaritmo final

2146. $6,534\times9,647$
2147. $5483\times7,832\times7,383$
2148. $\frac{7,43\times5,12}{620}$
2149. $\frac{41635\times3694}{4627}$
2150. $\frac{7968\times9347}{6348}$
2151. $\frac{5489\times24730}{724\times325}$
2152. $0,347\times0,0576\times0,049$
2153. $0,49\times1,547\times27,095$
2154. $\frac{0,735\times0,0948}{0,654}$
2155. $\frac{0,548\times0,7854}{0,378}$

2156. $0,925 \div (0,038 \times 0,584)$
2157. $\sqrt{2}$
2158. $\sqrt{3}$
2159. $\sqrt[3]{2}$
2160. $\sqrt[3]{3}$
2161. $\sqrt{5}$
2162. $\sqrt{13}$
2163. $\sqrt{10}$
2164. 8^{2}
2165. 8^{3}
2166. 11^{2}
2167. 14^{15}
2168. $(0,257)^{3}$
2169. $(41/56)^{2}$
2170. $(0,368)^{5}$
2171. $(37/69)^{4}$
2172. $\sqrt{0,837}$
2173. $\sqrt[3]{5,85}$
2174. $\sqrt{0,05649}$
2175. $(3/22)^{6}$
2176. $(5/73)^{7}$
2177. $\sqrt{9,341}$
2178. $\sqrt{7/34}$
2179. $1,3478 \times 0,25745$
2180. $5,6428 \div 11,28416$
2181. $\sqrt{9,55649}$
2182. $\sqrt{9/13}$
2183. $\sqrt{34/272}$
2184. $\sqrt[11]{7/12}$
2185. $2,435 \times 0,067 \times 9,0095$
2186. $8,973 \times 3,471 \times 0,005$
2187. $(0,482 \times 0,006) \div 5,045$
2188. $7,5^{4}$
2189. $1,25^{3}$
2190. $\sqrt{9345}$
2191. $\sqrt{25639}$
2192. $\sqrt[11]{149627}$
2193. $0,035 \times \sqrt{0,035} \times 0,035^{2}$
2194. $(\sqrt{3} \times 3^{2}) \div \sqrt{3^{4}}$
2195. $\frac{27}{32} \div \frac{4}{7}$
2196. $\frac{3}{47} \div \frac{82}{9}$
2197. $(0,367)^{4}$
2198. $2,049^{5}$
2199. $\sqrt{2,9943}$
2200. $\sqrt[3]{1,009}$
2201. $\sqrt{26,35}$
2202. $\sqrt{7/325}$

Calcular as expressões seguintes e dar o logaritmo final, sabendo que

$\pi = 3,1416 \qquad e = 2,7183 \qquad g = 9,809 \qquad R = 2,5$

2203. πR^{2}
2204. $\frac{4\pi R^{2} e}{3}$
2205. $\frac{4\pi R^{3}}{3}$
2206. 2^{e}
2207. $\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$
2208. e^{π}
2209. $\pi \left(\sqrt[3]{\frac{3R}{4\pi}} \right)^{2}$
2210. R^{π}
2211. $\sqrt{\pi R^{2} g^{3} e}$
2212. $\sqrt[8]{\pi}$
2213. $\pi R g e$
2214. $4\sqrt{\pi} \div 5\sqrt{e}$
2215. $(\sqrt{e})^{\pi}$
2216. $(\sqrt[\pi]{g})^{e}$
2217. $\sqrt{g\sqrt{e\sqrt{R\sqrt{\pi}}}}$

Resolver as equações seguintes :

2218. $2^{x} = 1024$
2219. $0,73^{x} = 0,5329$
2220. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = 7$
2221. $10^{x} = 2$
2222. $10^{x} = 5$
2223. $2 \log x = 6 \log 2$
2224. $\log x = \log 36 - 2 \log 3$
2225. $2 \log x - 2 \log 4 = \log 3 - \log 7$
2226. $\frac{1}{5} \log x = \frac{\log 7}{5} + \log 2$
2227. $12^{x^2-5x+3} = 1728$
2228. $\log x + \log y = 1,477\ 1213$
$\log x - \log y = 0,522\ 8787$
2229. $\log x + \log y = \log 3 + 2 \log 2$
$\log x - \log y = \log 3 - 2 \log 2$

PROBLEMAS

2230. Achar o número dos termos da progressão

$\div 4:8:16:\ldots\ldots:1024$

2231. Achar o número dos termos da progressão

$\div 4080:\ 2040:\ldots\ldots:31,875$

2232. Achar o número dos termos e a razão de uma progressão geométrica se o primeiro têrmo é 9, o último 9 216, e a soma dos termos 18 423.

2233. Achar a razão de uma progressão geométrica se o primeiro têrmo é $\frac{1}{2187}$, o último 729, e o número dos termos 14.

2234. A população de um paiz aumenta cada ano de $\frac{1}{100}$. Daqui a quantos anos será triplicada ?

2233. Sabendo que, depois do dilúvio, a população da terra era de 8 pessôas, e o aumento médio anual foi de 1/220, qual é a população atual do globo. (O dilúvio aconteceu ha 4 200 annos.)

2236. Inserir 10 meios proporcionais entre 10 e 20.

2237. Calcular a superfície de um triângulo cujos lados são 30, 36, 40 metros.

2238. Dada a progressão

$\div 6:12:\ldots\ldots:12\ 288$

achar o número dos termos.

2239. De uma barrica de 100 litros de vinho, tirou-se 1 litro 20 vezes seguidas, e cada vez foi substituido por 1 litro de agua. Depois disto, ha quantos litros de vinho puro na barrica ?

CAPITULO V

JUROS COMPOSTOS E ANUIDADES

I. Juros compostos.

305. **Definições.** — Uma quantia está a *juros compostos* quando, no fim de cada ano, os juros *se juntam* ao capital para produzirem juros êles mesmos.

Diz-se que os juros se *capitalizam* quando se juntam assim ao capital.

Taxa dos juros compostos é o premio produzido por 100$ num ano. Designa-se por r o centésimo da taxa; r é pois o juro anual de um mil reis.

306. **Formula dos juros compostos.** — Seja:

c um capital posto a juros compostos,

r a taxa anual de 1$,

t o número de anos durante os quais o capital c vence juros compostos.

Como 1$ vence um juro anual igual a r, $c$$ vencerão $c \times r$. Portanto, o capital c, junto a seu juros compostos, valerá, depois de um ano:

$$c + cr = c(1+r).$$

Assim, para se saber quanto vale, depois de um ano, um capital posto a juros compostos á taxa 100 r, basta multiplicar este capital por $1+r$.

O capital $c(1+r)$ valerá pois, junto a seus juros compostos, depois de um ano, isto é, no fim do segundo ano:

$$c(1+r)(1+r) = c(1+r)^2.$$

Este capital valerá, por sua parte, depois de um ano, isto é, no fim do terceiro ano:

$$c(1+r)^2(1+r) = c(1+r)^3;$$

e assim por diante.

Designando por C o capital definitivo depois de t anos, é evidente que temos:

$$C = c(1+r)^t \qquad (1)$$

307. **Modificação da fórmula.** — Se os juros se capitalizarem todos os 6 mezes, e se a taxa de um ano fôr 100 r, a de 6 mêses será 100 $\frac{r}{2}$, e o número de capitalizações será $2t$.

Igualmente o juro de 1$ por 6 mêses será $\frac{r}{2}$.

E a fórmula vem a ser:

$$C = c\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t} \qquad (1')$$

308. **Aplicações da fórmula** (1). — A fórmula

$$C = c(1+r)^t$$

contem quatro quantidades, C, c, r e t; póde-se, pois, calcular uma, conhecendo as tres outras. Desta formula tira-se:

$$C = c(1+r)^t \qquad (1)$$

e

$$c = \frac{C}{(1+r)^t} \qquad (2)$$

e, tomando os logaritmos,

$$\log C = \log c + t \log(1+r) \qquad (3)$$

$$\log c = \log C - t \log(1+r) \qquad (4)$$

$$t = \frac{\log C - \log c}{\log(1+r)} \qquad (5)$$

$$\log(1+r) = \frac{\log C - \log c}{t} \qquad (6)$$

Para se aplicarem as fórmulas (1) e (2), calcularam-se as potências sucessivas de $1+r$. O quadro seguinte contem para as 6 taxas mais empregadas, as 50 primeiras potências de $1+r$, ou de

1,03 ; 1,04 ; 1,045 ; 1,05 ; 1,055 ; 1,06

Assim, na coluna 5 %, temos:

$1{,}05 = 1{,}0500000$
$1{,}05^2 = 1{,}1025000$
$1{,}05^3 = 1{,}1576250$
$1{,}05^4 = 1{,}2155063$, etc.

A. Tabela indicando o valor de 1$ a juros compostos.

Anos	3 0/0	4 0/0	4,50 0/0	5 0/0	5,50 0/0	6 0/0
1	1,0300000	1,0400000	1,0450000	1,0500000	1,0550000	1,0600000
2	1,0609000	1,0816000	1,0920250	1,1025000	1,1130250	1,1236000
3	1,0927270	1,1248640	1,1411661	1,1576250	1,1742414	1,1910160
4	1,1255088	1,1698586	1,1925186	1,2155063	1,2388247	1,2624770
5	1,1592741	1,2166529	1,2461819	1,2762816	1,3069600	1,3382256
6	1,1940523	1,2653190	1,3022601	1,3400956	1,3788428	1,4185191
7	1,2298739	1,3159318	1,3608618	1,4071004	1,4546792	1,5036303
8	1,2667701	1,3685691	1,4221006	1,4774554	1,5346865	1,5938481
9	1,3047732	1,4233118	1,4860951	1,5513282	1,6190943	1,6894790
10	1,3439164	1,4802443	1,5529694	1,6288946	1,7081445	1,7908477
11	1,3842339	1,5394541	1,6228530	1,7103394	1,8020924	1,8982986
12	1,4257609	1,6010322	1,6958814	1,7958563	1,9012075	2,0121965
13	1,4685337	1,6650735	1,7721961	1,8856491	2,0057739	2,1329283
14	1,5125897	1,7316764	1,8519449	1,9799316	2,1160915	2,2609040
15	1,5579674	1,8009435	1,9352824	2,0789282	2,2324765	2,3965582
16	1,6047064	1,8729813	2,0223701	2,1828746	2,3552627	2,5403517
17	1,6528476	1,9479005	2,1133768	2,2920183	2,4848022	2,6927728
18	1,7024331	2,0258165	2,2084788	2,4066192	2,6214663	2,8543392
19	1,7535061	2,1068492	2,3078603	2,5269502	2,7656469	3,0255995
20	1,8061112	2,1911231	2,4117140	2,6532977	2,9177575	3,2071355
21	1,8602946	2,2787681	2,5202412	2,7859626	3,0782344	3,3995636
22	1,9161034	2,3699188	2,6336520	2,9252607	3,2475370	3,6035374
23	1,9735865	2,4647155	2,7521663	3,0715238	3,4261516	3,8197497
24	2,0327941	2,5633042	2,8760138	3,2250999	3,6145899	4,0489346
25	2,0937779	2,6658363	3,0054345	3,3863549	3,8133923	4,2918707
26	2,1565913	2,7724698	3,1406790	3,5556727	4,0231289	4,5493830
27	2,2212890	2,8833686	3,2820096	3,7334563	4,2444010	4,8223459
28	2,2879277	2,9987033	3,4297000	3,9201291	4,4778431	5,1116867
29	2,3565655	3,1186515	3,5840365	4,1161356	4,7241244	5,4183879
30	2,4272625	3,2433975	3,7453181	4,3219424	4,9839513	5,7434912
31	2,5000804	3,3731334	3,9138574	4,5380395	5,2580686	6,0881006
32	2,5750828	3,5080588	4,0899810	4,7649415	5,5472624	6,4533867
33	2,6523352	3,6483811	4,2740302	5,0031885	5,8523618	6,8405899
34	2,7319053	3,7943163	4,4663615	5,2533480	6,1742417	7,2510253
35	2,8138625	3,9460890	4,6673478	5,5160154	6,5138250	7,6860868
36	2,8982783	4,1039325	4,8773785	5,7918161	6,8720854	8,1472520
37	2,9852267	4,2680899	5,0968605	6,0814069	7,2500501	8,6360871
38	3,0747835	4,4388135	5,3262192	6,3854773	7,6488028	9,1542523
39	3,1670270	4,6163660	5,5658991	6,7047511	8,0694870	9,7035075
40	3,2620378	4,8010206	5,8163645	7,0399887	8,5133088	10,2857179
41	3,3598989	4,9930615	6,0781009	7,3919882	8,9815408	10,9028610
42	3,4606959	5,1927839	6,3516155	7,7615876	9,4755256	11,5570327
43	3,5645168	5,4004953	6,6374382	8,1496669	9,9966794	12,2504546
44	3,6714523	5,6165151	6,9361229	8,5571503	10,5464968	12,9854819
45	3,7815958	5,8411757	7,2482484	8,9850078	11,1265541	13,7646108
46	3,8950437	6,0748227	7,5744196	9,4342582	11,7385146	14,5904875
47	4,0118950	6,3178156	7,9152685	9,9059711	12,3841329	15,4659167
48	4,1322519	6,5705282	8,2714556	10,4012697	13,0652602	16,3938717
49	4,2562194	6,8333494	8,6436711	10,9213331	13,7838495	17,3775040
50	4,3839060	7,1066834	9,0326363	11,4673998	14,5419612	18,4201543

Aplicações. — 1.º *Achar o valor adquirido pelo capital de 10:000$, a juros compostos durante 20 anos a 4 %.*

PRIMEIRO METODO. — A fórmula (1) dá :

$$A = 10\,000\,(1{,}04)^{20}$$

Segundo o quadro (**A**), temos :

$$(1{,}04)^{20} = 2{,}191\,1231$$

Portanto :

$$A = 10\,000 \times 2{,}191\,1231 = \mathbf{21:911\$231}$$

SEGUNDO METODO. — A fórmula (3) permite escrever

$$\log A = \log 10\,000 + 20 \log 1{,}04$$

As taboas de logaritmos dão :

$$\log 10\,000 = 4$$

$$20 \log 1{,}04 = 0{,}340\,6668$$

donde $\log A = 4{,}340\,6668$

e portanto $A = \mathbf{21:911\$230}$

2º *Um capital, a juros compostos, durante 15 anos, a 5 %, veiu a ser 20:000$; qual é esse capital ?*

PRIMEIRO METODO. — A fórmula (2) dá :

$$a = \frac{20\,000}{1{,}05^{15}}$$

Ora, o quadro (**A**) fornece

$$1{,}05^{15} = 2{,}078\,9282$$

Donde

$$a = \frac{20\,000}{2{,}0789282} = \mathbf{9:620\$350}$$

SEGUNDO METODO. — A fórmula (4) permite escrever

$$\log a = \log 20\,000 - 15 \log 1{,}05$$

As taboas de logaritmos dão :

$$\log 20\,000 = 4{,}301\,0300$$

$$-15 \log 1{,}05 = \bar{1}{,}682\,1605$$

Donde $\log a = 3{,}983\,1905$

e portanto $a = \mathbf{9:620\$350}$

3.º *Uma quantia de 12:000$ esteve a juros compostos a 4,5 % durante um tempo desconhecido, no fim do qual se tornou 25:000$. Qual é este tempo?*

PRIMEIRO METODO. — A fórmula (1) dá :

$$(1{,}045)^n=\frac{25\,000}{12\,000}=\frac{25}{12}=2{,}083\,3333.$$

Consultando o quadro (**A**), vê-se na coluna 4,5 % que 2,0833333 está compreendido entre 2,0223701 e 2,1133768 ; portanto, n está compreendido entre 16 anos e 17 anos.

O tempo procurado é, pois, 16 anos mais uma fração x que podemos determinar como segue :

Quando 2,0223701 aumenta da diferença tabular que é :

$$2{,}1133768-2{,}0223701=910067 \text{ decimos milionesimos,}$$

o número correspondente de anos aumenta de 365 dias ; quando 2,0223701 aumentar de

$$2{,}0833333-2{,}0223701=609632 \text{ decimos milionesimos}$$

o número de anos, 16, aumentará de x dias, proporcionalmente.

E temos aproximadamente :

$$\frac{x}{365}=\frac{609632}{910067}.$$

Donde se tira :

$$x=244 \text{ dias, ou 8 mêses e 4 dias.}$$

Resp. : **16 anos 8 mêzes 4 dias.**

SEGUNDO METODO. — A fórmula (5) permite escrever

$$n=\frac{\log 25-\log 12}{\log 1{,}045}$$

As taboas de logaritmos dão :

$$\log 25=1{,}397\ 9400$$
$$-\log 12=\bar{2}{,}920\ 8187$$

Donde $\log 25-\log 12=0{,}318\ 7587$

Mas temos :

$$\log 1{,}045=0{,}019\,1163$$

Temos pois :

$$n=\frac{0{,}3187587}{0{,}0191163}=\textbf{16 anos 8 mêses 5 dias.}$$

4º *A que taxa foi emprestada uma quantia de* 8:450$ *que se tornou* 15:175$, *a juros compostos, durante* 12 *anos?*

PRIMEIRO METODO. — A fórmula (1) dá :

$$(1+r)^{12}=\frac{15\,175}{8\,450}=1{,}795\ 8579$$

Procurando no quadro (**A**) entre as 12 as potências de $(1+r)$ ou entre os números da decima segunda linha horizontal, acha-se que 1,7958579 está na coluna de **5 %**.

SEGUNDO METODO. — A fórmula (6) permite escrever :

$$\log (1+r)=\frac{\log 15175-\log 8450}{12}.$$

As taboas de logaritmos dão :

$$\log 15175=4{,}181\ 1287$$
$$-\log 8450=\bar{4}{,}073\ 1433$$

Donde $12 \log(1+r)=0{,}254\ 2710$

Portanto $\log (1+r)=\frac{0{,}254\ 2710}{12}=0{,}0211893$

Passando aos números correspondentes, temos :

$$1+r=1{,}05,$$

e

$$r=0{,}05.$$

A taxa $100r$ é, pois, **5 %**.

5º *Quanto tempo leva uma quantia, a juros compostos, para se tornar* p *vezes maior, se o juro anual de* 1$ *é* r?

Temos : $C=c(1+r)^t$

Pois que $C=pc$, temos tambem :

$$pc=c(1+r)^t$$

e

$$p=(1+r)^t$$

Tomando os logaritmos, vem :

$$\log p=t \log (1+r) ;$$

donde

$$t=\frac{\log p}{\log (1+r)}.$$

6º *Como aplicação, seja achar que tempo leva um capital para se duplicar, a* 5 %.

Temos : $p=2$ $r=0{,}05$

Portanto :

$$t=\frac{\log 2}{\log 1{,}05}=\frac{0{,}3010300}{0{,}0211893}=\textbf{14 anos 2 mêses 15 dias.}$$

II. Constituição de um capital.

309. **Definição.** — *Anuidade* é uma quantia fixa, paga todos os anos com o fim de *constituir* um capital ou *amortisar* uma divida.

310. **Problema geral.** — *Uma pessôa põe a juros compostos, no começo de cada ano, uma quantia fixa* c. *Qual será o capital constituido depois de* t *anos, se o juro anual de 1$ é r?*

A 1.ª anuidade c vence juros durante t anos, depois dos quais, vale:

$$c(1+r)^t$$

A 2.ª anuidade vence juros durante $t-1$ *anos*, depois dos quais vale:

$$c(1+r)^{t-1}$$

A 3.ª vence juros durante $t-2$ anos, depois dos quais vale:

$$c(1+r)^{t-2}, \text{ etc.}$$

A ultima anuidade paga vence juros durante um ano, no fim do qual vale

$$c(1+r)$$

Se o capital constituido fôr C, temos:

$$C=c(1+r)+c(1+r)^2+\ldots+c(1+r)^{t-1}+c(1+r)^t$$

ou

$$C=c[(1+r)+(1+r)^2+\ldots+(1+r)^{t-1}+(1+r)^t]$$

A quantidade entre parêntesis quebrados é uma progressão geometrica de t termos, de razão $1+r$; a soma dos termos é (n.º 258):

$$S_t=\frac{(1+r)^{t+1}-(1+r)}{r}$$

O capital constituido é pois:

$$C=cS_t \qquad (1)$$

ou

$$C=\frac{c}{r}[(1+r)^{t+1}-(1+r)] \qquad (2)$$

311. **Aplicações das formulas** (1) e (2). — Para se aplicarem estas formulas, calcularam-se S_1, S_2, S_3, S_4, etc.

O quatro (B) contem estas diferentes somas para as taxas:

3 %, 4 %, 4,50 %, 5 %, 6 %

B. Tabela indicando o capital adquirido no fim de cada ano por um pagamento anual de 1$.

ANOS	3 0/0	4 0/0	4,50 0/0	5 0/0	6 0/0
1	1,0300000	1,0400000	1,0450000	1,0500000	1,0600000
2	2,0909000	2,1216000	2,1370250	2,1525000	2,1836000
3	3,1836270	3,2464640	3,2781911	3,3101250	3,3746160
4	4,3091358	4,4163226	4,4707097	4,5256313	4,6370930
5	5,4684090	5,6329755	5,7168917	5,8019128	5,9753186
6	6,6624632	6,8982945	7,0191518	7,1420084	7,3938376
7	7,8923361	8,2142263	8,3800136	8,5491089	8,8974679
8	9,1591061	9,5827953	9,8021142	10,0265643	10,4913160
9	10,4638793	11,0061071	11,2882094	11,5778925	12,1807949
10	11,8077957	12,4863514	12,8411788	13,2067872	13,9716426
11	13,1920296	14,0258055	14,4640318	14,9171265	15,8699412
12	14,6177904	15,6268377	16,1599133	16,7129829	17,8821377
13	16,0863242	17,2919112	17,9321094	18,5986320	20,0150659
14	17,5989139	19,0235876	19,7840543	20,5785636	22,2759699
15	19,1568813	20,8245311	21,7193367	22,6574918	24,6725281
16	20,7615877	22,6975124	23,7417069	24,8403664	27,2128798
17	22,4144354	24,6454129	25,8550837	27,1323847	29,9056526
18	24,1168684	26,6712294	28,0635625	29,5390039	32,7599917
19	25,8703745	28,7780786	30,3714228	32,0659541	35,7855912
20	27,6764857	30,9692017	32,7831368	34,7192518	38,9927267
21	29,5367803	33,2479698	35,3033779	37,5052144	42,3922903
22	31,4528837	35,6178886	37,9370300	40,4304751	45,9958277
23	33,4264702	38,0826041	40,6891963	43,5019989	49,8155773
24	35,4592643	40,6459083	43,5652101	46,7270988	53,8645120
25	37,5530422	43,3117446	46,5706446	50,1134538	58,1563827
26	39,7096335	46,0842144	49,7113236	53,6691265	62,7057657
27	41,9309225	48,9675830	52,9933332	57,4025828	67,5281116
28	44,2188502	51,9662863	56,4230332	61,3227119	72,6397983
29	46,5754157	55,0849378	60,0070697	65,4388475	78,0581862
30	49,0026782	58,3283353	63,7523878	69,7607899	83,8016774
31	51,5027585	61,7014687	67,6662452	74,2988294	89,8897780
32	54,0778413	65,2095274	71,7562263	79,0637708	96,3431647
33	56,7301765	68,8579085	76,0302565	84,0669594	103,1837546
34	59,4620818	72,6522249	80,4966180	89,3203073	110,4347799
35	62,2759443	76,5983139	85,1639658	94,8363227	118,1208667
36	65,1742226	80,7022464	90,0413443	100,6281388	126,2681187
37	68,1594493	84,9703363	95,1382048	106,7095458	134,9042058
38	71,2342328	89,4091497	100,4644240	113,0950231	144,0584581
39	74,4012597	94,0255157	106,0303231	119,7997742	153,7619656
40	77,6632975	98,8265364	111,8466876	126,8397629	164,0476836
41	81,0231965	103,8195978	117,9247885	134,2317511	174,9505446
42	84,4838923	109,0123817	124,2764040	141,9933386	186,5075772
43	88,0484091	114,4128770	130,9138422	150,1430056	198,7580319
44	91,7198614	120,0293921	137,8499651	158,7001559	211,7435138
45	95,5014572	125,8705677	145,0982135	167,6851637	225,5081246
46	99,3965009	131,9453906	152,6726331	177,1194218	240,0986121
47	103,4083960	138,2632061	160,5879016	187,0253929	255,5645288
48	107,5406479	144,8337343	168,8593572	197,4266626	271,9584005
49	111,7968673	151,6670837	177,5030283	208,3479957	289,3359046
50	116,1807733	158,7737670	186,5356643	219,8153955	307,7560589

Assim na coluna 4 p. 100, temos:

$S_1 = 1,0400000 = (1,04)^1$

$S_2 = 2,1216000 = (1,04)^1 + (1,04)^2$

$S_3 = 3,2464640 = (1,04)^1 + (1,04)^2 + (1,04)^3$

$S_4 = 4,4163226 = (1,04)^1 + (1,04)^2 + (1,04)^3 + (1,04)^4$

$S_5 = 5,6329755 = (1,04)^1 + (1,04)^2 + (1,04)^3 + (1,04)^4 + (1,04)^5$

Aplicações. — *Um pai quer constituir um dote a cada um de seus 4 filhos, com uma anuidade de 4:320$posta a 5 %, a juros compostos. Quanto receberá cada filho, no fim de 15 anos?*

PRIMEIRO METODO. — A fórmula (1) dá:

$$C = cS_t = 4\,320 \times S_{15}$$

Na tabela (**B**), acha-se na coluna 5 %:

$$S_{15} = 22,6574918$$

Donde resulta: $C = 4320 \times 22,6574918 = 97{:}880\$460$

O dote de cada filho será: $\dfrac{97\,880,460}{4} = \mathbf{24{:}470\$110}$

SEGUNDO METODO. — A fórmula (2) ou

$$C = \frac{c}{r}[(1+r)^{t+1} - (1+r)]$$

se torna: $C = \dfrac{4\,320}{0,05}(1,05^{16} - 1,05)$

A tabela (A) dá: $1,05^{16} = 2,1828746$

Portanto: $C = \dfrac{4320}{0,05}(2,1828746 - 1,05) = 97{:}880\$360$

Cada filho receberá: $\dfrac{97\,880,360}{4} = \mathbf{24{:}470\$090}$

TERCEIRO METODO. — Póde-se calcular $1,05^{16}$ por logaritmos. As taboas de logaritmos dão:

$$\log 1,05^{16} = 16 \log 1,05 = 0,3390288.$$

Donde $1,05^{16} = 2,182875$

Temos então: $C = \dfrac{4\,320}{0,05}(2,182875 - 1,05) = \mathbf{97{:}880\$360}$

2.º *Que quantia é preciso pagar anualmente, á taxa 4 %, para se obterem **45:000$** no fim de 10 anos?*

PRIMEIRO METODO. — A fórmula (1) dá:

$$45\,000 = cS_{10}$$

Na tabela (**B**), acha-se na coluna 4 %:

$$S_{10} = 12,4863514$$

Portanto: $45\,000 = c \times 12,4863514$

Donde se tira: $c = \dfrac{45\,000}{12,4863514} = \mathbf{3{:}603\$930}$

SEGUNDO METODO. — A fórmula (2) dá:

$$c = \frac{Cr}{(1+r)^{t+1} - (1+r)} = \frac{45\,000 \times 0,04}{1,04^{11} - 1,04}$$

Na tabela (**A**), na coluna 4 %, acha-se

$$1,04^{11} = 1,5394541$$

e então $c = \dfrac{45\,000 \times 0,04}{0,4994541} = \mathbf{3{:}603\$930}$

TERCEIRO METODO. — Na fórmula:

$$c = \frac{45\,000 \times 0,04}{1,04^{11} - 1,04}$$

podemos calcular $1,04^{11}$ por logaritmos; as taboas dão:

$$11 \log 1,04 = 0,1873667$$

O número correspondente é 1,539454

Temos pois: $c = \dfrac{45\,000 \times 0,04}{1,539454 - 1,04} = \mathbf{3{:}603\$900}$

3.º *Uma pessôa põe anualmente 2:000$ a 4,5 % e a juros compostos. Depois de quantos anos receberá 65:566$250?*

PRIMEIRO METODO. — Temos pela fórmula (1):

$$S_t = \frac{C}{c} = \frac{65\,566,25}{2\,000} = 32,783125$$

Na tabela (**B**) e na coluna 4,5 p. 100, acha-se que 32,783125 corresponde a 20 **anos**.

SEGUNDO METODO. — A fórmula (2) dá:

$$(1+r)^t = 1 + \frac{Cr}{c(1+r)}$$

ou $(1,045)^t = 1 + \dfrac{65\,566,25 \times 0,045}{2\,000 \times 1,045} = 2,4117135$

A tabela (A), na coluna 4,5 %, dá tambem :

$$(1,045)^{20}=2,4117140$$

Vê-se que o tempo procurado é **20 anos.**

4.º *Pagando anualmente 4:000$, constitue-se, depois de 30 anos, um capital de 233:313$3412. A que taxa se fez essa capitalização?*

Procuremos a desconhecida r.

A fórmula :

$$C=cS_t$$

dá

$$S_t=\frac{C}{c}=\frac{233\,313,3412}{4\,000}=58,3283353$$

ou

$$S_{30}=58,3283353$$

Procurando-se na tabela (B) e na 30.ª linha horizontal, vê-se que 58,3283353 se acha na coluna 4 0/0.

Observação. — A resolução direta, em relação a r, da fórmula (2), n.º 310, é impossivel ; teriamos que resolver uma equação do 31º gráu.

5.º *Em 1914, qual teria sido o valor de todas as anuidades pagas desde o nascimento de Jesus Cristo, a 5 %, se cada anuidade fosse de $050 reis?*

O capital constituido durante estes 1914 anos seria :

$$A=\frac{0,050}{0,05}(1,05^{1915}-1,05)=1,05^{1915}-1,05$$

As taboas de logaritmos dão :

$$\log 1,05^{1915}=40,577\ 5095$$

O número correspondente a este logaritmo, ou o capital procurado é

37 801 530 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

limitando-se ás mais altas unidades. Esta quantia é tão enorme que, em ouro, o volume dela seria superior a 300 bilhões de vezes o volume da terra.

III. Amortizações.

312. **Problema geral.** — *Uma pessôa pediu emprestado um capital C, a juros compostos. Quer libertar-se por meio de t pagamentos anuaes iguais. Qual será o valor da anuidade, se o juro anual de 1$ é r?*

Depois de t anos, a quantia C valerá $C(1+r)^t$ que o devedor terá de pagar. Para saldar a quantia $C(1+r)^t$, este devedor paga n anuidades. A primeira a vence juros durante $t-1$ anos entre as mãos do credor e vale, depois deste tempo :

$$c(1+r)^{t-1}.$$

A segunda anuidade, que vence juros durante $t-2$ anos, vale :

$$c(1+r)^{t-2}.$$

A terceira vale :

$$c(1+r)^{t-3}.$$

A penultima vence juros durante 1 ano, e vale :

$$c(1+r).$$

Emfim, a ultima anuidade paga-se no fim do ultimo ano e vale somente c.

Teremos, pois :

$$C(1+r)^t=c(1+r)^{t-1}+c(1+r)^{t-2}+...+c(1+r)+c,$$

ou ainda

$$C(1+r)^t=c[(1+r)+(1+r)^2+...+(1+r)^{t-2}+(1+r)^{t-1}]+c.$$

Designando por S_{t-1} a quantidade entre parêntesis, temos (Nº 258):

$$S_{t-1}=\frac{(1+r)^t-(1+r)}{r}$$

Portanto :

$$C(1+r)^t=cS_{t-1}+c,$$

ou

$$C=\frac{c(S_{t-1}+1)}{(1+r)^t}=\frac{c[(1+r)^t-1]}{r(1+r)^t} \qquad (1)$$

Aplicações. — *Póde-se amortizar uma divida pagando-se 22 anuidades de 1:565$ cada uma, á taxa de 5 %. Qual é a divida?*

PRIMEIRO METODO. — A fórmula

$$C=\frac{c(S_{t-1}+1)}{(1+r)^t}$$

se torna :

$$C=\frac{1565(S_{21}+1)}{1,05^{22}}$$

As tabelas (A) e (B) dão :

$$S_{21}=37,505\ 2144$$
$$1,05^{22}=\ 2,925\ 2607$$

Portanto :

$$C=\frac{1\ 565\ (37,5052144+1)}{2,925607}=\mathbf{20:600\$}$$

SEGUNDO METODO. — A fórmula (1) póde escrever-se:

$$C=\frac{1\ 565[1,05^{22}-1]}{0,05\times 1,05^{22}}$$

Ora, a tabela (A) dá :

$$1,05^{22}=2,9252607$$

Portanto :

$$A=\frac{1\ 565\times 1,9225607}{0,05\times 2,9252607}=\mathbf{20:600\$}$$

Observação. — Póde-se calcular a quantidade $1,05^{22}$ por meio dos logaritmos.

2.º *Emprestaram-se 50:000$ a 4 % e a juros compostos que se devem soldar por meio de 11 anuidades. Qual será cada anuidade?*

PRIMEIRO METODO. — A fórmula geral dá :

$$c=\frac{50\ 000\times 0,04\times 1,04^{11}}{1,04^{11}-1}$$

Por meio da tabela (A), ou da taboa de logaritmos, temos :

$$1,04^{11}=1,5394541$$

Donde resulta :

$$c=\frac{2000\times 1,5394541}{0,5394541}=\mathbf{5:707\$450}$$

SEGUNDO METODO. — A fórmula geral

$$C=\frac{c(S_{t-1}+1)}{(1+r)^t}$$

permite escrever

$$c=\frac{C(1+r)^t}{S_{t-1}+1}=\frac{50\ 000(1,04)^{11}}{S_{11}+1}$$

As tabelas (B) e (A) dão

$$S_{10}+1=12,4863514+1=13,486\ 3514$$

e

$$(1+r)^t=(1,04)^{11}=1,539\ 4541$$

Donde

$$c=\frac{50\ 000\times 1,5394541}{13,4863514}=\mathbf{5:707\$450}$$

3.º *Que tempo é necessário para se pagar uma quantia de 12:800$ emprestada a 5 % e a juros compostos, pagando-se 950$ todos os anos?*

Da fórmula geral :

$$C=\frac{c[(1+r)^t-1]}{r(1+r)^t}$$

se deduz :

$$(1+r)^t=\frac{c}{c-Cr}$$

e tomando-se os logaritmos :

$$t\ log\ (1+r)=log\ c-log(c-Cr)$$

Donde

$$t=\frac{log\ 950-log\ (950-12\ 800\times 0,05)}{log\ 1,05}=\frac{log\ 950-log\ 310}{log\ 1,05}$$

As taboas de logaritmos dão :

$$log\ \ 950=2,977\ 7236$$
$$log\ \ 310=2,491\ 3617$$
$$log\ 1,05=0,021\ 1893$$

Portanto :

$$t=\frac{0,4863619}{0,0211893}=$$ [illegible] **anos 11 mêses 13 dias.**

4º *A que taxa é preciso pôr anualmente 25:000$ para se extinguir uma divida de 291:307$300 em 16 anos?*

A fórmula (1) dá (nº 312) :

$$\frac{(1+r)^{16}-1}{r(1+r)^{16}}=\frac{C}{c}=\frac{291307,3}{25\ 000}=11,652\ 2920$$

Experimentando-se a taxa 3 % a expressão

$$\frac{(1+r)^{16}-1}{r(1+r)^{16}}$$

toma um valor superior a 11,652 2920.

Experimentando-se 4, acha-se :

$$\frac{(1,04)^{16}-1}{0,04\times 1,04^{16}}=11,652\ 2920$$

Portanto, a taxa é **4** 0/0.

PROBLEMAS SOBRE OS JUROS COMPOSTOS

2240. Quanto vale a quantia de 1:000$, a juros compostos a 5 % no fim de 5 anos ?

2241. Quanto vale a quantia de 10:000$, a juros compostos a 4 %, no fim de 11 anos ?

2242. Um industrial pede emprestado, a 4,5 % e a juros compostos, o capital necessario para comprar 500 toneladas de carvão, a 130$ a tonelada. Quanto tem de pagar no fim de 6 anos ?

2243. Que quantia se deve entregar hoje a 3 % e a juros compostos para se receberem depois de 14 anos, 12:000$, capital e juros juntos ?

2244. Ha 11 anos ½ que um negociante me entregou 60:000$, a 6 % e a juros compostos. Quanto lhe devo hoje ?

2245. Qual é o mais vantajoso, emprestar 6:500$ a 4 % e a juros compostos durante 5 anos, ou emprestá-los a 5 % no mesmo tempo e a juros simples ?

2246. Qual é o mais vantajoso, emprestar, durante 7 anos, 2:500$ a 5 % capitalizando-se os juros todos os seis mêses, ou emprestá-los a 6 %, capitalizando-se anulamente os juros ?

2247. Um negociante compra 586 Hl. de trigo a 18$500 o Hl. que deve pagar no fim de 3 anos 8 mêses, com os juros compostos a 5,5 %. Quanto ha de pagar no dia do vencimento e por quanto deve vender o hectolitro para lucrar 780$?

2248. Calcular o valor atual de 6:000$, emprestados a juros compostos, desde 3 anos 5 mêses, se a taxa é de 5 %.

2249. Um homem rico quer recompensar dois alunos, o 1.º de 9 anos e o 2.º de 12 anos, e faz-lhes a repartição de 3:500$ de modo que cada parte posta a juros compostos a 5 % valha a mesma quantia quando cada um dos alunos alcançar 20 anos. Como se dividiram os 3:500$?

2250. Daqui a quantos anos a quantia de 10:000$, emprestada a juros compostos a 4 % tornar-se-á 19:479$?

2251. A juros compostos de 6 % ao ano, emprestou-se a quantia de 5:000$. Daqui a quanto se ha de receber 6:000$?

2252. Um homem emprestou a quantia de 10:000$ a juros compostos a 5 %; quer retirá-la quando estiver triplicada; quanto tempo deve esperar ?

2253. Que tempo é preciso para que uma quantia emprestada a juros compostos seja : 1.º duplicada, 2.º triplicada ; a taxa % sendo : 1.º 3 ; 2.º 4 ; 3.º 5 ; 4.º 6 ?

2254. Que quantia teria retirado a 1.º de janeiro de 1895 aquele que tivesse emprestado $050 a juros compostos a 4 % no nascimento de Nosso Senhor ?

2255. No nascimento de seu filho, um pai empresta a 5 % a quantia de 10:000$ que não se retirará senão quando o capital junto aos juros compostos velerá 26:533$. Qual será então a idade do filho ?

2256. Dois negociantes puzeram, o 1.º 12:000$, e o 2.º 12:092$620 a juros compostos e a 4 %. O 1.º capitaliza todos os 6 mezes, e o 2.º todos os anos ; depois de quanto tempo receberão a mesma quantia ?

2257. A quantia de 4:000$ emprestada a juros compostos tornou-se 5:105$1264 em 5 anos. Qual era a taxa ?

2258. A que taxa se deve emprestar 25:000$ a juros compostos para se retirarem 33:502$400 no fim de 6 anos ?

2259. Uma quantia de 60:000$ foi emprestada a juros compostos durante certo tempo. Ficando um ano menos, o capital definitivo teria sido inferior de 3:996$120 ; e ficando um ano mais, o capital definitivo teria sido superior de 4:156$020. Qual é a taxa e o tempo durante o qual essa quantia venceu juros ?

PROBLEMAS SOBRE AS CONSTITUIÇÕES DE CAPITAIS

2260. Um criada deseja saber que quantia ha de receber no fim de 20 anos, se põe a juros compostos, a 5%, a quantia de 200$ no começo de cada ano.

2261. Põe-se no começo de cada ano, a quantia de 10:000$ a 6 %. Quanto se ha de receber no fim de 10 anos, capital e juros simples juntos ? Quanto se receberia a mais, se os juros se capitalizassem todos os anos ?

2262. No começo de cada ano, um negociante pôz certa quantia a juros compostos e a 5 %. Que quantia entregava anualmente, se recebeu, no fim de 10 anos, 41:271$210 ?

2263. No primeiro dia de cada ano faz-se o deposito de 500$, a juros compostos a 5 %. Depois de quantos anos haverá 18:752$610 de capital e juros juntos ?

2264. A que taxa se deve pôr anualmente a quantia de 25:000$ para se retirar, no fim de 10 anos, a quantia de 312:158$789 ?

EXERCICIOS SOBRE AS AMORTIZAÇÕES

2265. Que anuidade se deve pagar para se amortizar, em 15 anos, uma divida de 40:000$, os juros capitalizando-se todos os anos a 5 % ?

2266. Qual é a divida que se póde amortizar em 6 anos, com uma anuidade de 750$, á taxa de 5 % ?

2267. Para se amortizar uma divida de 15:000$ a juros compostos de 5 %, pagaram-se 10 anuidades de 1:000$ cada uma. Quanto se deve ainda ?

2268. Que tempo seria preciso para se amortizar uma divida de 12:800$ a 5 % e a juros compostos, pagando-se 950$ todos os anos ?

2269. Uma cidade recebe de emprestimo 185:000$ que deve amortizar em 12 pagamentos anuais iguais ; o 1.º começa um ano depois do emprestimo. Calcular a anuidade, se a taxa dos juros compostos é 4,5 %.

2270. Puzeram-se 100$ a juros compostos e a 6% e no começo de todos os anos seguintes, entregou-se uma anuidade que excede de 20$ a anuidade precedente. Qual será o capital final depois de 10 anos ?

2271. Um negociante pede emprestado o capital de 100:000$ a 5 %, que deve amortizar em 16 anos por anuidades iguais. Qual é o valor de uma anuidade ?

2272. Uma cidade toma de emprestimo a quantia de 6:500$, a juros compostos a 5 %, que deve amortizar com 12 pagamentos anuais iguais, o 1.º começando um ano depois do emprestimo. Calcular a anuidade.

2273. Comprou-se uma casa por 300:000$ pagaveis á vista. Modificam-se as condições e fazem-se tres pagamentos anuais iguais ; começa o 1.º no fim do primeiro ano. Os juros são compostos e á taxa de 5 % ; qual é o valor da anuidade ?

CAPITULO VI

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS DE RECAPITULAÇÃO

I. Calculo algebrico.

Reduzir os termos semelhantes :

2274. $450-124a^3+33-52a^2+67-11a^3-457+87a^3+7$

2275. $19a^2-\frac{3b^2}{6}+a^4-4b^3+\frac{5a^2}{6}+\frac{4a^4}{7}-\frac{8b^2}{9}-\frac{3a^4}{4}$

Calcular as expressões seguintes, para $x=2$ e $a=-2$:

2276. $a^3x^3-3a^2x^2+3ax-1$

2277. $\frac{2x^3}{a^4}-\frac{4a^3}{x^4}+\frac{a^2x^2}{6}-\frac{a^3}{8}-\frac{x^3}{9}+9$

Dados os polinómios

$A=a^2+2ab+b^2$ $\quad$ $C=-a^2+2ab-b^2$

$B=a^2-2ab+b^2$ $\quad$ $D=2ab-2a^2-2b^2$

Calcular as expressões seguintes :

2278. $5A-4B-3C+2D$

2279. $4(A-B)-3(D-C)$

2280. $2A-3B+2C-3D$

2281. $3(A+D)+2(A-C)+3(C-B)$

Efetuar e reduzir :

2282. $a^2(-a^3)a^3(-a^4)(-a^5)a^6$

2283. $x^3(-x^5)(-x)(-x^2)x^4$

2284. $6x^3(-18x^3y)18xy^2(-6y^3)\frac{x^2y^2}{1944}$

2285. $(-12a^2b^3c^4)^2(-2a^3b^2c^4)^3$

2286. $(12-12x^2y^2+15x^3-24y^3)(-14x^2y^3)$

2287. $-27a^5x^4y^3z^2\left(\frac{-2a^4x^2}{27}+\frac{3ax^2yz^2}{21}-5a^2x^4y^3z^4\right)$

Decompôr em factores :

2288. $19x^3-38x^4+152x^5-608x^3$

2289. $(5ax^3)^4-(5a^2x^2)^3+(5a^3x^4)^3-(5a^4x)^3$

2290. $125x^3y^6-1$

2291. $(x^3z^4)^4-1$

Efetuar as operações indicadas :

2292. $(x^4+y^4-x^2y^2)(x^4-y^4+xy)$

2293. $\left(\frac{3x^3}{4}-6x^2y-\frac{xy^2}{2}+5y^3\right)\left(-2x^2+\frac{2xy}{3}-\frac{y^2}{3}\right)$

2294. $(15a^4b^2-7a^2b^4)^2$

2295. $\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2$

2296. $(a-7b)^3$

2297. $(4x^2-1)^3$

2298. $(9a^4-5a^2)^3$

2299. $\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3$

2300. $(a^2+a-1)^3$

2301. $(a+b)^4$

2302. $(a-b)^4$

2303. $(a+1)^4$

2304. $(x^2-1)^4$

2305. $(a+b+1)^3$

2306. $(a-b+c-d)^2$

2307. $\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)^4$

2308. Achar dois numeros consecutivos cuja diferença dos cubos seja 397.

Sabendo que $a+b=m$ e $ab=n$, calcular em função de m e de n cada uma das expressões seguintes :

2309. $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

2310. a^5+b^5

2311. $1/a+1/b$

2312. $1/a^2+1/b^2$

Efetuar as divisões seguintes :

2313. $a^{m+5}\div a^{m-4}$

2314. $a^{2m+1}\div(-a^{1+3m})$

2315. $(a^{-3}\div a^{-6})\div(a^5\div a^3)$

2316. $a^{5m}b^{3n}\div a^{-m}b^{3n}$

2317. $-a^6b^{4-m}\div a^5b^{5-m}$

2318. $-5^4.6^3.7^{-4}\div(-5^{-3}.6^{-5}.7^{-4})$

Transformar as expressões seguintes, pela aplicação da definição dos expoentes negativos :

2319. a^{-4}

2320. 3^7

2321. $(a^2b)^{-4}$

2322. $1/a$

2323. $1/a^3$

2324. a/b

Efetuar as operações indicadas :

2325. $(-27a^7b^4c^3d^4)\div(-25a^6b^4c^3d^4)$
2326. $a^5x^{m+1}y^{n-1}\div a^3x^{m-1}y^{n-1}$
2327. $(-3a^2b^3\times 4a^3b^4c)\div(-7a^2b^4\times 28a^5b^2c)$

Simplificar os quocientes indicados :

2328. $-49a^5b^2c^3\div(-28a^4b^3c^4)$
2329. $(-50a^3bc^4)\div[(-100a^4b^2)\times(2a^{-2}bc^3)]$
2330. $[(-a^4x^5y^4z^3)\times(a^3x^3y^4z^4)]\div(-a^6x^{11}y^{12}z^8)$

Efetuar as divisões :

2331. $(x^4y^3z^3-x^5y^2z^2)\div x^3y^2z^2$
2332. $(x^2y^3z^3-4x^3y^3z^4-3x^4y^3z^3+4y^2z^4)\div(-y^2z^2)$
2333. $(9x^6-36y^6)\div(3x^3-6y^3)$
2334. $(256x^{14}-2187y^{14})\div(2x^2-3y^2)$
2335. $(a^4+2a^2b^2+2b^4)\div(a^2+ab+b^2)$
2336. $(x^7-15x^5+x^3-x^2+3x-1)\div(x^4-1)$
2337. $(x^3-2ax^2+2abx+3ab^2-b^3)\div(x+a-b)$
2338. $(6x^3-7x^2+3x-1)\div(3x^2+4x-1)$
2339. $(21-7x^4+3x^7+x^{10})\div(3-x^3)$
2340. $(a+b)\div(a^2-1)$
2341. $(a+b)\div(a+1)$
2342. $(x^4-y^4)\div(x+y)$
2343. $(1+b^4)\div(1+b^3)$
2344. Achar a condição para que ax^2+bx+c seja divisivel por $x+p$.
2345. Para que valor de x o polinómio $a^3+b^3+c^3-abcx$ é divisivel por $a+b+c$?
2346. Qual deve ser o valor de x para que o polinómio $x^3+a^3-3abx+b^3$ seja divisivel por $x+a+b$?

Calcular os 6 primeiros termos do quociente de cada uma das divisões seguintes :

2347. $(x^3-1)\div(x-2)$
2348. $(x^8-x^7+x^5-x^4+x-1)\div(x-3)$
2349. $(a^m-1)\div(a^n-1)$
2350. $(a-b)\div(a-1)$
2351. $1\div(a+1)$
2352. $1\div(1-a)$

Simplificar as frações seguintes :

2353. $\left(\frac{\frac{5}{6}a^3b^2}{0{,}3a^5b}\right)^3$
2354. $\frac{1-x^3}{(x+1)^2-x}$
2355. $\frac{a^6-b^6}{a^8-b^8}$
2356. $\frac{a^2-2a-3}{a^3+2a^2+2a+1}$
2357. $\frac{x^2-9x+20}{x^2-11x+30}$
2358. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

Reduzir ao mesmo denominador :

2359. $\frac{a}{b^2c},\quad \frac{b}{a^2c},\quad \frac{d}{abc^2}$.
2360. $\frac{1}{(a-b)^2},\frac{1}{a^2-b^2},\frac{1}{(a^2-b^2)^2}$
2361. $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2},\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2},\frac{1}{a^2b^2}$
2362. $1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{a-b}$.
2363. $\frac{2}{x},\ \frac{a^2-b^2}{a-b},\ \frac{1}{x^2(a^2-b^2)}$
2364. $\frac{x-1}{x+1},\ \frac{x+1}{x^2+1},\ \frac{x-1}{x^2-1}$

Efetuar e reduzir:

2365. $\frac{4-2a+a^2}{2+a}-2-a$
2366. $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{2x^3}{x^4-1}$
2367. $x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$
2368. $\frac{1/a-1/b}{1/a+1/b}+\frac{2a+2b}{a-b}$
2369. $\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\times\frac{a^3-b^3}{x^3-y^3}$
2370. $\left(x-\frac{2}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)$
2371. $\frac{x^m}{y^n}\times\frac{y^m}{x^n}\times\frac{x^{n+1}}{y^{m+1}}$
2372. $\left(\frac{m^2}{n^2}+1\right)\left(\frac{mn^2}{m^2+n^2}\right)$
2373. $\left(\frac{a^2-1}{a^4-1}\right)^2\div\left(\frac{a^4-1}{a^2-1}\right)^4$
2374. $\frac{-27a^3b^5}{c^4}\div\frac{81c^5b^5}{-a^4}$
2375. $\left(\frac{m^3}{n^3}-1\right)\div\left(\frac{n^3}{m^3}-1\right)$
2376. $\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\div\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

2377. Demonstrar que as relações $x=\frac{2b^2-a^2+c^2}{3a}$ e $y=\frac{2a^2-b^2+c^2}{3b}$

têm por consequencia a proporção $\frac{a}{b+y}=\frac{b}{a+x}$.

2378. A proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, tem por consequencia a seguinte

$$\sqrt[4]{\frac{a^4-c^4}{b^4-d^4}}=\sqrt[10]{\frac{a^{10}-c^{10}}{b^{10}-d^{10}}}.$$

2379. Demonstrar que temos: $\frac{\frac{a}{b+c}-\frac{a}{b+2c}}{\frac{a}{b+2c}-\frac{a}{b+3c}}=\frac{\frac{a}{b+c}}{\frac{a}{b+3c}}$,

2380. Demonstrar que a proporção :

$$\frac{m(a+b)+n(c+d)}{mb+nd}=\frac{p(a+b)-q(c+d)}{pb-qd},$$

tem a seguinte $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ por consequencia.

2381. Estabelecer a proporção $\frac{\sqrt[3]{2a^3+3c^3}}{\sqrt[3]{2b^3+3d^3}}=\frac{\sqrt{5a^2+6c^2}}{\sqrt{5b^2+6d^2}}$ sabendo

que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

II. Equações do primeiro gráu.

2382. $7x=21+9x-29$

2383. $62+5(x-7)=9x-1$

2384. $8(x-5)=7(5-x)$

2385. $x-10=1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)$

2386. $\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{4}\right)+\frac{1}{12}-\frac{x}{8}=0$

2387. $2x-6=\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+x+1$

2388. $\frac{2x}{3}=\frac{7x}{12}+5$

2389. $\frac{x-9}{3}=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-\frac{2}{5}$

2390. $\frac{3x}{7}+\frac{5x}{3}+x=5(8-x)+19-1$

2391. $\frac{x-2-a}{2}+6x=\frac{3x-2-a}{2}$

2392. $\frac{\frac{x}{4}+\frac{x}{2}+2}{x}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}+\frac{10}{x}$

2393. $\frac{x+1}{b}-\frac{c}{a}=\frac{x-1}{b}+\frac{2}{b}-\frac{mc}{a}$

2394. $\frac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{\frac{2x}{1-x}}=\frac{1}{4+\frac{2-x}{3}}$

2395. $\frac{a^2-ax}{b}-\frac{b^2+bx}{a}=x$

2396. $a^2(x-a)+b^2(x-b)=abx$

2397. $\frac{x}{a}-\frac{bx}{a}=ab$

2398. $\frac{x-4}{x-5}=\left(\frac{2x-4}{2x-5}\right)^2$

2399. $\frac{x-4}{x-8-a}=\frac{x+a}{x+2a+4}$

2400. $\frac{9}{x-c}=\frac{7}{x-7}+\frac{2}{x-2}$

2401. $\frac{x-3}{a}-\frac{x-a}{3}=\frac{a}{3}.$

Dar as raizes inteiras positivas das equações indeterminadas seguintes:

2402. $2x+y=6$

2403. $x-2y=10$

2404. $4x+3y=10$

2405. $11x-10y=20$

2406. $\frac{5x}{2}-\frac{3y}{4}=1$

2407. $\frac{3x}{4}+\frac{9y}{10}=30$

2408. $x+y+z=100$
$3x+2y=z$

2409. $x-2y-z=1$
$2x-y+z=20$

Equações de varias incógnitas a resolver:

2410. $3x-1=4y+1$
$6x-8y-1=6-(x-y)$

2411. $y+x-32=\frac{2-x}{9}$
$12(x-10)=11y+10$

2412. $14x=8y+17$
$6(x-1)=5(y-1)$

2413. $\frac{3x}{95}+y=\frac{13}{5}$
$4x-7y=70$

2414. $5x-y=\frac{3y}{2}+20$
$10x+y=\frac{4y+512}{5}$

2415. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{2}{xy}$
$3x-2y+2=0$

2416. $x-a=y-b$
$b(x-a)+a(y-b)=0$

2417. $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}-2=0$
$\frac{x}{b}=\frac{y}{a}$

2418. $b(y+c)=x(a+c)$
$x+y-ab=0$

2419. $a(x-a)+b(y-b)=0$
$b(x+y)+a(x-y)=a^2+b^2$

2420. $3x+5y-126245=0$
$4x-5y=0$

2421. $\frac{10x-4}{4x-3y}=1$
$\frac{3}{y-1}=\frac{2}{3x+5}$

2422. $\frac{b}{x}=\frac{1}{y-a}$
$\frac{y}{c+x}=\frac{1}{a}$

2423. $x+y=0.$
$3x-5y=0$

2424. $\frac{x}{2}-\frac{5y}{3}=10-2x$
$7x/12=y-5$

2425. $x-y=504$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=36$

2426. $\frac{x}{3}+y+\frac{2z}{3}-\frac{11}{3}=0$
$x+\frac{2y}{3}+\frac{z}{3}-\frac{11}{3}=0$
$\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}+z-\frac{14}{3}=0$

2427. $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+z=4$
$\frac{7x}{9}-\frac{11y}{2}+z=4,5$
$\frac{x}{5}-y+\frac{z}{5}=1,20$

2428. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=\frac{17}{3}$
$z+\frac{3y}{5}-\frac{2z}{5}=2$
$x+\frac{4y}{7}+\frac{5z}{7}=\frac{3}{7}$

2429. $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$
$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$
$1,5x+y+4z=50,5$

2430. $x+y+z=0$
$x-2y-z=0$
$3x-y+2z=0$

2431. $2x+3y-4z=14$
$4x-6y+7z=37$
$8x+9y+10z=214$

2432. $x+y=a+b+c$
$x+z=a+b-c$
$y+z=a-b+c$

2433. $\frac{7x}{3}=y+10$
$x=33-y-z$
$\frac{9y}{5}=z+6,8$

2434. $x+y+z=1$
$x-y+z=-1$
$x-y-z=1$

2435. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}+\frac{4}{u}=\frac{48}{12}$
$\frac{1}{y}+\frac{2}{z}+\frac{3}{u}+\frac{4}{x}=\frac{71}{12}$
$\frac{1}{z}+\frac{2}{u}+\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=\frac{70}{12}$
$\frac{1}{u}+\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=\frac{61}{12}$

2436. $2x-y+3z=4$
$5x+y-z=12$
$12x+y+z=26$

III. Problemas do primeiro gráu.

2437. Um pai tem 45 anos e o filho 15. Daqui a quantos anos a idade do pai será 4 vezes a do filho ?

2438. A soma de dois números é 36 e a diferença de seus quadrados é 504. Achar estes números.

2439. A diferença dos quadrados de dois números consecutivos é 203. Achar os dois números.

2440. Qual é a fração que vem a ser 1/3 quando se acrescenta a unidade ao numerador, e 1/4 quando se acrescenta a unidade ao denominador ?

2441. Dado um paralelipípedo retângulo cujas arestas são a, $3a$, $6a$, calcular a aresta de um cubo tal que as superficies dos dois solidos estejam entre si como seus volumes.

2442. É meio-dia. Daqui a quanto tempo os ponteiros de um relógio formarão um ângulo réto ?

2443. O número 29 se escreve 32 num sistema de base desconhecida. Calcular esta base.

2444. Dois correios passam no mesmo lugar a 2 horas de intervalo ; a velocidade do 1.º é de 6 km. por hora, e a do 2.º de 8 km. Caminham no mesmo sentido. Daqui a quanto tempo hão de se encontrar ?

2445. Tres homens jogam ; 1.º e o 2.º perdem juntos 10$; o 1.º e o 3.º gastam 9$, e os dois ultimos 11$. Quanto perdeu cada um ?

2446. Quando eu tinha a idade do Snr. tinhamos juntos 10 anos ; e quando o Snr. tiver minha idade, teremos juntos 50 anos. Achar nossas idades.

2447. Um número inteiro tem 3 algarismos cuja soma iguala 3 vezes o algarismo das dezenas. Achar este número sabendo que perde 198 unidades trocando-se os algarismos das unidades e das centenas ; o algarismo das unidades é duas vezes menor que o das centenas.

2448. Certo número de 2 algarismos escrito no sistema decimal tem 7 por soma dos algarismos. Com a base 6, o número formado dos mesmos algarismos vale 16 unidades menos do que o 1.º. Achar este número.

2449. O número 23 está escrito em dois sistemas de numeração cujas bases diferem de duas unidades. Achar essas bases se a soma dos dois numeros é 34.

2450. Repartir o número 100 em 4 partes diretamente proporcionais aos números a, $4a$, $6a$, $9a$.

2451. Repartir o número a^2 em partes inversamente proporcionais ao números a, $\frac{a}{4}$, $\frac{a}{6}$, $\frac{a}{9}$.

2452. Depois de duplicar um número e diminui-lo de 2, duplica-se de novo o resultado ; depois subtrai-se 2, duplica-se o novo resultado terceira vez e vem 68 para resultado final. Qual é o número primitivo ?

2453. Certa quantia emprestada a juros simples a 5 % venceu 10 vezes mais juros, menos 140$, do que se estivesse emprestada a 4 %. Qual é essa quantia ?

2454. Dados n pontos não em linha réta, une-se cada um a todos os outros e vêm 45 retas distintas ; calcular n.

2455. É meio-dia ; daqui a quanto tempo os tres ponteiros de um relógio achar-se-ão juntos no mesmo ponto do mostrador ?

2456. Misturam-se tres espécies de vinho, a $300, a $600 e a $700 o litro, de modo que a mistura valha $500 o litro. Como se fez a mistura ?

2457. Pagou-se a quantia de 51$ com notas de 2$ et de 5$. Quantas notas houve de cada espécie ?

2458. Duas fontes, correndo uma durante 3 dias e outra durante 5 dias, encheram um tanque de 1 200 m³ ; as mesmas fontes, correndo respetivamente durante 2 e 4 dias, encheram outro tanque de 840 m³ Qual é a quantidade de agua que fornece por dia cada fonte ?

2459. Tres sócios compraram uma casa de 50:000$. O 1.º sócio pagaria toda a casa se tivesse a mais a metade do haver do 2º sócio ; o 2.º a pagaria por sua vez se tivesse a mais o terço do haver do 1.º ; emfim o 3.º precisaria do quarto do haver do 1.º. Qual é o haver de cada um ?

2460. Tres operários devem fazer um trabalho. O 1.º e 2.º o fariam em 8 dias ; o 1.º e o 3.º o fariam em 9 dias, e o 2.º e o 3.º em 10 dias. Quantos dias levaria cada um para o fazer ?

2461. Uma pessôa troca notas de 5$ por notas de 2$. Que quantia trocou, se depois da operação tem 252 notas a mais ?

2462. Um homem caridoso, encontrando certo número de pobres, quer dar 5$ a cada um ; mas depois de contar seu dinheiro, faltam-lhe 5$. Então dá 4$ a cada pobre e sobram-lhe 5$. Quanto tinha e quantos pobres socorreu ?

2463. Um general quer dispôr seus 1404 soldados em quadrado de centro vazio. Deve haver tres fileiras em cada lado. Quantos soldados haverá em cada fileira ?

2464. Um moribundo deixa $a$$ ao filho mais velho e $b$$ ao outro. O 1.º aumenta anualmente seu haver de $c$$, e o segundo diminue o seu de $d$$. Daqui a quanto tempo o mais velho, terá m vezes o haver do segundo ?

2465. Resolver a desigualdade

$$5x-10>20-x.$$

2466. Resolver o sistema

$$7x-15>20-3x,$$
$$14x-21<23+10x.$$

2467. Entre que limites póde variar o 3º lado de um triângulo, se os outros têm 12 m. e 20 m.?

IV. Exercícios sobre os radicais.

Achar as raizes quadradas das expressões seguintes :

2468. $(a+b-c)^{10}$.

2469. $\sqrt[3]{(a+b)^{14}}$.

2470. $\sqrt[3]{a^4b^8c^{10}}$.

2471. $225a^6b^8\sqrt[3]{a^4}$.

Simplificar os radicais :

2472. $\sqrt[6]{a^4b^8c^6d^8}$

2473. $\sqrt{8a^4b^3-16a^4b^4}$

2474. $\sqrt[6]{16a^2(a-b)^4d^7}$

2475. $-\sqrt[3]{-\frac{a^6}{b^9}}$

Reduzir ao mesmo indice :

2476. $a,\ b^2,\ \sqrt{c}$

2477. $1,\ \sqrt[3]{a},\ a^2$

2478. $a^4,\ \sqrt[3]{b^2}$

2479. $\sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[4]{a^3}$

Efetuar as operações indicadas e reduzir :

2480. $\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{-64}-\sqrt[3]{-216}$

2481. $\sqrt{16a-32}+5\sqrt{49a-98}$

2482. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}}\cdot\sqrt[6]{a^3}$

2483. $5\sqrt[3]{81}\div\sqrt[3]{9}$

2484. $\sqrt{\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2}}}}}}$

2485. $\sqrt{a^5\sqrt[3]{b^2}}+\sqrt[3]{b^2\sqrt{a^3}}\div\sqrt[3]{ab}$

2486. $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2$

2487. $\left(\sqrt{ab}+b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{ab}\right)$

2488. $(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}})\ (\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}})$

2489. $\frac{5}{a}\sqrt[3]{-a^3}\cdot\frac{a}{10}\sqrt[3]{a^2b^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^4}$

Simplificar e reduzir :

2490. $\sqrt{-4a^4b^2c}$

2491. $\sqrt{-4a^2}+\sqrt{-9b^4}-\sqrt{-3bc^3}$

Efetuar :

2492. $\sqrt{-2}.\sqrt{-3}.\sqrt{-4}$

2493. $(\sqrt{-2}+\sqrt{-3})^2$

2494. $(2+\sqrt{-1})\ (2-4\sqrt{-1})$

Decompôr em factores :

2495. a^3+b^3

2496. $1/a^3+1/b^3$

2497. a^4+b^4

2498. x^4+1

V. Exercícios sobre o segundo gráu.

Equações a resolver :

2499. $\frac{x^2-4}{5}-4+\frac{x^2-1}{4}=17$

2500. $x(15+x)-15(15+x)-400=0$

2501. $\frac{x+3}{x-3}-1=\frac{x+3}{12}$

2502. $\frac{x}{9}+\frac{9}{x}-\frac{x}{16}-\frac{16}{x}=0$

2503. $x^2-1=x-0{,}25$.

2504. $(3-2x)^2-8x=0$

2505. $\frac{x}{x+2}-1+\frac{x+2}{4x}=0$

2506. $\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{a}$

2507. $\frac{(x-1)8x}{x+1}=(15-7x)\ (x-1)$

2508. $\frac{x-1/2}{x-1}-\frac{x-3/2}{x-2}+\frac{1}{12}=0$

2509. $b^2x^2-2b^3x+b^4=1$.

2510. $4x=(1-a^2+x)^2$

2511. $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=\frac{x}{a}+\frac{a}{x}$

2512. $a^2(x^2-2x+1)=(x^2+2x+1)$

2513. $(x-4)\ (x-1)=\frac{4}{3}(x-2)\ (x+3)-28$

2514. $x^2+(x-a)^2=b$

Pelo exame das equações seguintes, dizer a natureza das raizes e dar o realizante :

2515. $5x^2-4x+8{,}8=0$

2516. $x^2+3x-40=0$

2517. $x^2-2x+2=0$

2518. $x^2-4x+4=0$

Sem resolver as equações seguintes achar a soma das raizes, sua diferença e seu produto :

2519. $x^2-49x+360=0$

2520. $x^2-2x-80=0$

2521. $4x^2-4x+5=0$

2522. $144x^2-24x+1=0$

Formar a equação do 2º gráu cujas raizes são :

2523. 1, 99

2524. 4, —20

2525. 10, —10

2526. 4, 4

2527. 1/2, —1/2

2528. $10+\sqrt{-10},\ 10-\sqrt{-10}$

Achar a equação de raizes inversas das raizes das seguintes equações :

2529. $x^2-25x+100=0$

2530. $16x^2-8x+1=0$

2531. Achar a equação de segundo gráu cujas raizes excedem de 1 as da equação $x^2-6x+8=0$.

Dada a equação $x^2+px+q=0$, achar que relação deve existir entre p e q para que :

2532. $x'=4x''$

2533. $\frac{x'}{x''}=\frac{m}{n}$

2534. $4x'-8x''=4$

2535. $x'^2+x''^2=K$

2536. $x'^2-x''^2=K$

2537. $x'=x''$

Dada a equação $x^2+px+q=0$, achar em função de p e de q as expressões seguintes :

2538. $x'^2+x''^2$

2539. $x'^3+x''^3$

2540. $1/x'+1/x''$

2541. $1/x'^2+1/x''^2$

Dada a equação $x^2+px+120=0$, determinar p de modo que :

2542. $x'=40$

2543. $x'-x''=10$

2544. $x'=3x''/4$

2545. $x'^2+x''^2=2500$

2546. $x'^2-x''^2=700$

2547. $1/x'^2+1/x''^2=1/576$.

Resolver as desigualdades seguintes :

2548. $x^2-17x+70>0$

2549. $x^2+3x-70<0$

2550. $x^2-4x-5<0$

2551. $x^2-4x>0$

2552. $x^2-21x+20<0$

2553. $-x^2+20x-75>0$

2554. $x^2-16x+65>0$

2555. $-x^2+110x-300>0$

Decompôr em quadrados os trinómios seguintes :

2556. $x^2-70x+1200$

2557. $x^2+14x+33$

2558. $x^2-34x+289$

2559. $x^2-22x+122$

Resolver as equações biquadradas seguintes :

2560. $x^4-185x^2+7744=0$

2561. $4x^4-5x^2+1=0$

2562. $36x^4-13x^2+1=0$

2563. $x^4-9x^2=0$

Resolver os sistemas seguintes :

2564. $xy^2=18$
$x^2+y^2=11$

2565. $\frac{y+3}{2}=x$
$\frac{4x^2-3x}{5}=y^2+1$

2566. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$
$x+y=13$

2567. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$
$x^2+y^2+z^2=d$

2568. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$
$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{10}{256}$

2569. $x-y=5$
$x^3-y^3=875$

VI. Problemas sobre o segundo gráu.

2570. As duas raizes de uma equação do 2º gráu têm por diferença a^2b^2 e por produto $\left(\frac{a^4-b^4}{2}\right)^2$. Calcular as duas raizes.

2571. Na equação $x^2-3xy+y^2+2x-9y+1=0$, que valor se deve dar a y para que esta equação, resolvida em relação a x, tenha raizes iguais?

2572. Que valor se deve dar a n para que o trinómio $x^2-2nx+11$ seja superior a 10?

2573. Quantos termos se devem tomar na progressão

$$\div 4.7.10.13.....$$

para que a soma dêles seja 60 500 ?

2574. Um triângulo retângulo gira ao redor de um cateto de 40 m. de comprimento ; o volume gerado é 5 026 m³ 547. Achar os dois lados desconhecidos.

2575. A diagonal de um retângulo tem 25 m. Aumentando-se o menor lado de 2 m., e diminuindo-se o maior de 2 m., a diagonal não muda. Calcular os lados.

2576. Achar dois números inteiros cuja diferença dos quadrados seja 15.

2577. Um cone de cortiça tem 0 m. 6 de raio na base e 0 m. 8 de altura. Mergulha na agua pelo vertice. Que parte da altura fica imersa ? A densidade da cortiça é 0,24.

2578. Resolver as equações :

$$x+y=a, \quad \text{e} \quad xy(x^2+y^2)=b.$$

2579. Determinar 3 números em progressão geométrica conhecendo a soma e o produto.

2580. Determinar 5 numeros em progressão aritmética, conhecendo a soma e o produto.

2581. Na equação $x^2+px+q=0$, que valor se deve dar ás quantidades p e q, para que as raizes sejam precisamente p e q?

2582. Qual é, para $x=1$, o verdadeiro valor da fração $\frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$?

2583. Resolver o sistema $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1$, $x-y=217$.

2584. Qual é a soma dos termos da progressão geométrica

$$1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^5}+.....$$

sabendo que $a>1$ e o numero dos termos é infinito?

Resolver as equações seguintes :

2585. $\log\,(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$.

2586. $\log\sqrt{5x+8}+\frac{1}{2}\log(2x+3)=\log 15$.

2587. $\log\sqrt{7x+5}+\log\sqrt{2x+3}=1+\log\ 4{,}5$.

2588. É meio-dia ; pela teoria das progressões geométricas, achar daqui a quanto tempo os dois ponteiros de um relógio hão de estar um sobre outro.

2589. Por meio da mesma teoria, achar o limite da fração periódica mixta 3,1 245 245 245.....

2590. Qual é o capital que, emprestado durante 5 anos a juros compostos a 5 %, venceu 104$230 de juros a mais do que se fosse emprestado a 4 % durante 4 anos?

PONTOS SUPLEMENTARES

I. Raiz algebrica em geral, particularmente a raiz quadrada (Vêr os n.os 151 e 152).

313. **Raiz quadrada de um monómio.** — *Obtem-se a raiz quadrada de um monómio extraindo-se a raiz quadrada do coeficiente e dividindo-se por dois o expoente de cada letra. O resultado tem o duplo sinal + e —.*

Ex. Temos:

$$\sqrt{4a^2x^4y^6} = \pm 2ax^2y^3$$

$$\sqrt{25a^3b^4y^6z^5} = \pm 5ab^2y^3z^2\sqrt{az}$$

Esta regra é uma consequência do n.º 152.

314. **Raiz quadrada de um polinómio qualquer.** — *Para se extrair a raiz quadrada de um polinómio qualquer:*

1.º *Ordena-se o polinómio em relação ás potências decrescentes de uma mesma letra;*

2.º *Extrái-se a raiz quadrada do 1.º têrmo, e vem o têrmo da raiz, que se eleva ao quadrado para se subtrair do polinómio;*

3.º *Divide-se o primeiro têrmo do resto pelo dobro do 1.º têrmo da raiz, e vem o 2.º têrmo da raiz, que se multiplica por si mesmo e pelo dobro da raiz já achada; o produto subtrai-se do 1.º resto;*

4.º *Divide-se o primeiro têrmo do 2.º resto pelo dobro do 1.º têrmo da raiz, e vem o 3.º da raiz que se multiplica por si mesmo e pelo dobro da raiz já achada; o produto subtrai-se do 2.º resto. E assim por diante;*

5.º *A operação está acabada quando o resto é nulo ou de gráu inferior ao da raiz achada.*

315. *Seja extrair a raiz de:*

$$9a^4+12a^3+34a^2+20a+25$$

Sabemos (40) que o primeiro têrmo $9a^4$ deste polinómio provem sem redução da multiplicação por si mesmo do 1.º têrmo da raiz procurada.

Portanto, o 1º têrmo da raiz é $\sqrt{9a^4}=3a^2$.

Faz-se o quadrado de $3a^2$, e subtraindo do polinómio os $9a^4$ achados, vem o resto:

$$12a^3+34a^2+20a+25.$$

Seja B o conjunto dos termos desconhecidos da raiz; esta raiz será então $3a^2+B$ e teremos:

$$9a^4+12a^3+34a^2+20a+25=(3a^2+B)^2=9a^4+B(2.3a^2+B);$$

donde, simplificando:

$$12a^3+34a^2+20a+25=B(2.3a^2+B).$$

Os dois membros desta igualdade são idênticos; logo, o primeiro têrmo $12a^3$ do primeiro membro provem, sem redução (40), da multiplicação do 1º têrmo de B por $2.3a^2$; portanto, o 1º têrmo de B se obterá dividindo $12a^3$ pelo dobro de $3a^2$.

O 2.º têrmo da raiz será, pois,

$$\frac{12a^3}{2.3a^2} = 2a.$$

Faz-se o quadrado da soma dos dois primeiros termos da raiz $3a^2+2a$, e subtraindo do polinómio proposto os $9a^4+12a^3+4a^2$ achados vem o 2.º resto:

$$30a^2+20a+25.$$

Seja C a parte ainda desconhecida da raiz; esta raiz será $3a^2+2a+C$, e teremos:

$$9a^4+12a^3+34a^2+20a+25=(3a^2+2a+C)^2=(3a^2+2a)^2 +C(2.3a^2+2.2a+C)$$

ou, simplificando:

$$30a^2+20a+25=C(2.3a^2+2.2a+C).$$

Os dois membros desta igualdade são identicos; logo, o primeiro têrmo $30a^2$ do primeiro membro provem, sem redução (40), da multiplicação do primeiro têrmo de C por $2.3a^2$; portanto, o primeiro termo de C se obterá dividindo $30a^2$ pelo dobro de $3\,a^2$.

O 3.º têrmo da raiz será, pois :

$$\frac{30a^2}{2.3a^2}=5.$$

Faz-se o quadrado da soma dos tres termos achados $3a^2+2a+5$, e subtraindo do polinómio proposto o quadrado obtido, vê-se que o resto é nulo e $\pm(3a^2+2a+5)$ é a raiz exata.

316. **Observação I.** — Na extração da raiz, para se achar um dos restos sucessivos, obtem-se o mesmo resultado subtraindo do polinómio proposto o quadrado da raiz já achada, ou subtraindo do resto precedente o produto do novo têrmo da raiz por si mesmo e pelo dobro dos termos já achados.

Com efeito, no exemplo acima, temos identicamente, com o segundo termo da raiz :

$$9a^4+12a^3+34a^2+20a+25-(3a^2+2a)^2=12a^3+34a^2$$
$$+20a+25-2a(2.3a^2+2a)$$

e com o terceiro termo da raiz :

$$9a^4+12a^3+34a^2+20a+25-(3a^2+2a+5)^2=30a^2+20a$$
$$+25-5(2.3a^2+2.2a+5)$$

Observação II. — Dispõe-se a operação como na aritmética. (Vêr curso médio da arit. F. T. D., n.º 461.)

Exemplo : *Extrair a raiz de :*

$$x^6-4x^5+10x^4-12x^3+9x^2.$$

Temos a operação :

	$x^6-4x^5+10x^4-12x^3+9x^2$	x^3-2x^2+3x
	$-x^6$	
1º resto	$-4x^5+10x^4-12x^3+9x^2$	$-4x^5\div 2x^3=-2x^2$ calculo do 2º termo da raiz.
	$+4x^5-4x^4$	$(2x^3-2x^2)(-2x^2)$ produto a subtrair do 1º resto.
2º resto	$6x^4-12x^3+9x^2$	$6x^4\div 2x^3=3x$ calculo do 3º termo da raiz.
	$-6x^4+12x^3-9x^2$	$(2x^3-4x^2+3x)3x$ produto a subtrair do 2º resto.
	0	

EXERCICIOS SOBRE A RAIZ QUADRADA

Extrair a raiz quadrada dos polinómios seguintes :

2591. $x^2+2ax+a^2$
2592. $x^2-2ax+a^2$
2593. $4x^2-4ax+a^2$
2594. $4x^2+4ax+a^2$
2595. $x^2-6ax+9a^2$
2596. $x^2+6ax+9a^2$
2597. $x^2y^2-2axy+a^2$
2598. $x^2y^2-2xy+1$
2599. $9x^2y^2-6abxy+a^2b^2$
2600. $9x^2y^2+6abxy+a^2b^2$
2601. $1+2x+x^2$
2602. $1-2x+x^2$
2603. $1+4abx+4a^2b^2x^2$
2604. $a^2+4abx+4b^2x^2$

2605. $x^4-2ax^3+3a^2x^2-2a^3x+a^4$
2606. $x^6-2a^2x^4+2a^3x^3+a^4x^2-2a^5x+a^6$
2607. $x^4+2ax^3+3a^2x^2+2a^3x+a^4$
2608. $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$
2609. $4x^6+4x^5+9x^4+8x^3+6x^2+4x+1$

II. Maximo comum divisor.

317. *Maximo comum divisor* algebrico é o produto de todos os factores primos comuns a duas ou mais quantidades, números, monómios ou polinómios.

318. Quantidade *prima* é qualquer quantidade inteira, que não é divisivel senão por si e pela unidade.

319. Quantidade *inteira* é aquela cujos expoentes são inteiros e positivos e não tem nenhum denominador ou radical.

320. **Teorema.** — *O m. c. d. de duas quantidades inteiras não muda multiplicando-se ou dividindo-se uma por qualquer quantidade que não tenha factor comum com a outra.*

Com efeito, os factores primos *comuns* ás duas quantidades ficam os mesmos e o m. c. d. é o produto desses factores primos comuns.

321. **Teorema.** — *Se dois polinómios* A *e* B *não são divisiveis um pelo outro, mas tenham o quociente* Q *e o resto* R *na sua divisão, o m. c. d. entre* A *e* B *é o mesmo que entre* B *e* R.

Com efeito, temos :

$$A=B.Q+R \quad \text{ou} \quad A-B.Q=R.$$

Seja D o m. c. d. de A e B ; como divide A e B, D divide tambem A—BQ, isto é, R.

Sejam a, b, r, os quocientes de A, B e R por D ; temos, dividindo todos os termos por D :

$$a = b.Q + r$$

Ora, b e r são primos entre si porque, se não o fossem, admitiriam um divisor comum que dividiria $bQ+r$, isto é, a; este divisor seria, portanto comum entre a e b, e então D não seria o *maximo* c. d. entre A e B.

b e r, sendo primos entre si, segue-se que D é o m. c. d. entre B e R, assim como o é já entre A e B.

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

322. **Monómios.** — *Achar o m. c. d. de*

$$270a^4b^2x^5 \quad \text{e} \quad 180a^3b^5x^4.$$

1º O m. c. d. de 270 e 180 é 90 ; é fornecido pela aritmética (Vêr curso médio, nº 278 e nº 300).

2º O m. c. d. de

$$a^4b^2x^5 \quad \text{e} \quad a^3b^5x^4 \quad \text{é} \quad a^3b^2x^4.$$

Portanto, o m. c. d. das duas quantidades propostas é

$$90a^3b^2x^4.$$

323. **Polinómios.** — *Achar o m. c. d. dos dois polinómios seguintes :*

$$X = 10a^2bx^3 - 20a^3bx^2 - 30a^4bx + 60a^5b$$

e

$$Y = 30a^3b^2x^2 - 45a^4b^2x - 30a^5b^2.$$

Observamos que

$$X = 10a^2b(x^3 - 2ax^2 - 3a^2x + 6a^3)$$
$$\text{e} \quad Y = 15a^3b^2(2x^2 - 3ax - 2a^2).$$

Ora, o m. c. d. de $10a^2b$ e $15a^3b^2$ é $5a^2b$; será, pois, o 1º factor do m. c. d. dos polinómios propostos X e Y.

Façamos agora :

$$A = x^3 - 2ax^2 - 3a^2x + 6a^3$$
$$\text{e} \quad B = 2x^2 - 3ax - 2a^2.$$

Resta achar o m. c. d. de A e B por divisões sucessivas raciocinando como segue :

Se B dividir A, B será o m. c. d. entre A e B, porque nenhum polinómio de gráu superior ao de B póde dividir A e B juntos.

Se B não dividir A, o m. c. d. entre A e B será o mesmo que entre B e o resto da divisão (Nº 321).

Somos, pois, levados a dividir A por B.

Antes, para facilitar esta divisão, multipliquemos A por 2 (nº 320) e temos :

Primeira divisão.

	Dividendo	Divisor / Quociente
A ou	$x^3 - 2ax^2 - 3a^2x + 6a^3$	$2x^2 - 3ax - 2a^2$
2A ou	$2x^3 - 4ax^2 - 6a^2x + 12a^3$	$x - 1$
	$-2x^3 + 3ax^2 + 2a^2x$	
Primeiro resto	$-ax^2 - 4a^2x + 12a^3$	
1º resto dividido pelo factor a	$-x^2 - 4ax + 12a^2$	
Multiplicação por 2	$-2x^2 - 8ax + 24a^2$	
	$+2x^2 - 3ax - 2a^2$	
Segundo resto	$-11ax + 22a^2$	
Divisão por $-11a$	$+x - 2a$	

Temos o quociente x e o resto $-ax^2 - 4a^2x + 12a^3$; este resto é divisivel pelo factor a ; podemos simplificá-lo por esse factor a e multiplicá-lo por 2 para facilitar a divisão (nº 320). Temos depois o 2º termo do quociente -1 e o resto $-11ax + 22a^2$.

Este resto é divisivel igualmente por $11a$; podemos simplificá-lo por $11a$ (nº 320) ou antes por $-11a$ para tornar positivo o primeiro termo.

Vêmos, portanto, que B não divide A e não é o m.c. d. entre A e B. Mas (nº 321) o m. c. d. de A e B é o mesmo que o de B e $x - 2a$, o resto da divisão.

Somos, pois, levados a dividir B por $x - 2a$, e temos :

Segunda divisão.

Dividendo	Divisor / Quociente
$2x^2 - 3ax - 2a^2$	$x - 2a$
$-2x^2 + 4ax$	$2x + a$
$+ax - 2a^2$	
$-ax + 2a^2$	
$0 + 0$	

Esta divisão é exata, e prova que $x - 2a$ é o m. c. d. entre B e $x - 2a$; esta quantidade é tambem o m. c. d. entre A e B (nº 321).

Portanto, o m. c. d. entre os polinómios X e Y será :

$$5a^2b(x - 2a) = 5a^2bx - 10a^3b$$

324. **Regra.** — *Para se calcular o m. c. d. de dois polinómios ordenados em relação a uma letra, é preciso:*

1.º Procurar os monómios divisores de cada polinómio, e pô-los em evidência em cada um destes polinómios; o m. c. d. destes divisores será o 1.º factor do m. c. d. procurado;

2.º Procurar o m. c. d. dos quocientes entre parêntesis pelo método das divisões sucessivas; este m. c. d. será o segundo factor do m. c. d. procurado.

O produto dos dois factores resolve o problema.

Em cada divisão parcial, simplifica-se o dividendo por qualquer monómio que não seja factor do divisor.

Se o 1.º têrmo de cada dividendo parcial não fôr divisivel pelo 1.º têrmo do divisor, multiplica-se o dividendo pelo factor necessário para tornar a divisão exata, comtanto que não seja factor do divisor.

EXERCICIOS SOBRE O M. C. D.

Achar o m. c. d. das expressões seguintes:

2610. $7a^2b^4c^5$ e $21a^5b^3c^4$ **2612.** $180a^5x^3y^5$ e $120a^2x^7y^3z^4$
2611. $16a^3b^5x^2$ e $128a^2b^6x^3y$ **2613.** $120m^3n^5x^7$ e $90m^4n^2$
2614. $2x^2-5ax+2a^2$ e $3x^3-7ax^2+3a^2x-2a^3$
2615. x^5-1 e x^4-1 **2617.** x^8-1 e x^6-1
2616. x^4+1 e x^2+1 **2618.** x^8+1 e x^6+1
2619. $25a^3b^2x^3-25a^3b^3$ e $75a^4b^2x^2-75a^4b^3$

III. Noções sobre séries.

325. *Série* é uma sucessão de termos em número ilimitado e formados segundo certa lei fixa.

As progressões aritméticas e geométricas são séries.

326. Uma série é *convergente* quando a soma de seus termos tende para um limite finito e determinado.

Uma série é *divergente* quanto a soma de seus termos vai aumentando indefinidamente.

As séries convergentes são as unicas importantes nas matemáticas.

IV. Regras de convergencia das séries.

327. **Regra I.** — *Uma serie é convergente quando seus termos são, em valor absoluto, menores do que os termos de uma série convergente cujos termos têm todos o mesmo sinal.*

Esta proposição é evidente, cada têrmo da primeira série sendo menor que o correspondente da segunda.

328. **Regra II.** — *Uma série é convergente se, a partir de certa ordem, a razão de um termo ao precedente tende para um limite inferior a 1.*

Seja a serie

$$U=U_0+U_1+U_2+\dots+U_n+U_{n+1}+\dots$$

na qual temos:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}<\alpha \quad \text{e} \quad \alpha<1.$$

Temos, pois:

$$U_{n+1}<\alpha U_n; \quad U_{n+2}<\alpha U_{n+1}; \quad U_{n+3}<\alpha U_{n+2}; \dots$$

donde, substituindo os U dos segundos membros pelo 2º membro da desigualdade precedente, vem

$$U_{n+1}<\alpha U_n; \quad U_{n+2}<\alpha^2 U_n; \quad U_{n+3}<\alpha^3 U_n; \dots$$

Logo, U_{n+1}, U_{n+2}, U_{n+3}.... são respetivamente menores que αU_n, $\alpha^2 U_n$, $\alpha^3 U_n$,.... termos de uma progressão geométrica convergente, pois que $\alpha<1$.

Portanto, a soma dos termos da serie U é convergente (nº 327).

329. **Observação.** — Se o limite α fosse maior que 1 a série seria divergente.

330. EXEMPLO. — A série exponencial:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\dots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}+\dots$$

é convergente seja qual fôr o valor de x.

Com efeito, façamos

$$U_n=\frac{x^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)},$$

teremos:

$$U_{n+1}=\frac{x^n}{1.2.3\dots(n-1)n}.$$

Donde vem:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{x}{n};$$

x é uma quantidade finita e n vai aumentando indefinidamente. Teremos, pois, para $n=\infty$,

$$\lim\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim\frac{x}{n}=0.$$

A série dada é, pois, convergente (n.º 328).

331. **Regra III.** — *Uma série de termos positivos é convergente, se, para n muito grande,* $\sqrt[n]{U_n}$ *tende para um limite* R *inferior a 1.*

Seja a série :

$$U=U_0+U_1+U_2+...+U_n+...$$

na qual temos, a partir da ordem n,

$$\sqrt[n]{U_n}<R \quad e \quad R<1.$$

Temos, pois :

$$U_n<R^n\;;\quad U_{n+1}<R^{n+1};\quad U_{n+2}<R^{n+2}...$$

Logo, a partir de U_n, a soma dos termos $U_n+U_{n+1}+U_{n+2}+...$ é menor que a soma dos termos da progressão geométrica $R^n+R^{n+1}+R^{n+2}+...$, a qual é convergente, pois $R<1$.

Portanto, a série U é tambem convergente (nº 327).

Observação. — Se o limite de $\sqrt[n]{U_n}$ fosse maior do que 1, a série seria divergente.

332. Exemplo. — *A série logaritmica :*

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+.....+\frac{x^n}{n}+.....$$

é convergente para $-1<x<1$.

Com efeito, temos :

$$U_n=\frac{x^n}{n};\quad \text{donde,}\quad \sqrt[n]{U_n}=\frac{x}{\sqrt[n]{n}}.$$

Como a raiz nª de qualquer numero positivo tende para o limite 1, vê-se que o limite do denominador $\sqrt[n]{n}$, para $n=\infty$, é 1.

E temos, para $n=\infty$:

$$lim\sqrt[n]{U_n}=lim\frac{x}{\sqrt[n]{n}}=x.$$

A série logaritmica será, pois, convergente, se o limite x fôr menor que 1 em valor absoluto, ou se $-1<x<1$ (nº 331).

333. **Regra IV.** — *Uma série formada de termos positivos e de termos negativos é convergente, se tomando-os em valor absoluto, a nova série é convergente.*

Seja a serie $U=u_0+u_1+u_2+...$ e seja tambem R a soma dos termos positivos e $-$ S a soma dos termos negativos a partir da ordem U_n.

Temos :

$$R-S=U_n+U_{n+1}+U_{n+2}+...$$

Por hipótese, R+S converge ; o mesmo ha de acontecer para R—S, que é menor com evidencia.

Logo, a serie U é convergente.

334. Exemplo. — A série :

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+...\pm\frac{x^{n-1}}{1.2.3...(n-1)}\pm...$$

é convergente, seja qual fôr o valor de x.

Com efeito, trocando todos os sinais — em +, temos, a série

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{1.2.3}+...+\frac{x^{n-1}}{1.2.3...(n-1)}+...$$

e já vimos que esta série é convergente para qualquer valor de x (nº 330).

335. **Regra V.** — *Uma série é convergente se seus termos, a partir de certa ordem, têm sinais alternativamente positivos e negativos e vão diminuindo de modo a ter 0 como limite.*

Seja a qualquer um dos termos decrescentes cujos sinais são alternados e $-b$, $+c$, $-d$, $+e$, etc., os seguintes termos.

Tomando como soma aproximada da série a soma dos termos que precedem a, e designando o erro por r, vamos demonstrar que r tende para zero.

Com efeito, temos

$$r=+[(a-b)+(c-d)+(e-f)+...] \qquad (1)$$

ou ainda

$$r=+[a-(b-c)-(d-e)-(f-g)-...] \qquad (2)$$

Pois que a, b, c,... vão decrescendo, todas as quantidades dentro dos parêntesis são positivas.

A equação (1) mostra que r tem o sinal de a, e a equação (2) que $r<a$.

Podemos, pois, tomar a bastante afastado para que seja tão pequeno como se quizer, e com maior razão, r achar-se-á tão pequeno como se quizer, isto é, tenderá para zero.

Logo, a série é convergente.

336. Exemplo. — A série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots \text{ é convergente.}$$

Com efeito, seus termos são alternativamente positivos e negativos, e $\frac{1}{n}$ tende para 0 quando $n=\infty$.

V. Número e.

337. — Seja a série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\ldots$$

Esta soma representa-se pela letra e.

338. **Teorema I.** — *A série e é convergente.*
Com efeito, temos :

$$U_n=\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

e

$$U_{n+1}=\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n};$$

donde

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{1}{n},$$

e, no limite, para $n=\infty$,

$$\lim\frac{U_{n+1}}{U_n}=0.$$

Logo, a série e é convergente (nº 328).
Esta série é um caso particular da série exponencial (nº 330) em que se faz $x=1$.

339. **Teorema II.** — *O número e é* <3.
Com efeito, seus termos, depois do 1º, são respetivamente menores que os da progressão geometrica :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\frac{1}{2.2.2.2}+\ldots$$

que é decrescente e tem o limite 2 (nº 261).

340. **Calculo de** $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots$

Os dois primeiros termos têm a soma.................. 2

O 3º termo vale $\frac{1}{2}$ ou.. 0,5

Dividindo o 3º têrmo por 3, vem o 4º, que é........... 0,16666

Dividindo o 4º têrmo por 4, vem o 5º, que é.......... 0,04166

assim por diante.

O calculo dá o valor : $e=2,7\ 1828\ 1828\ 4590$

341. **Teorema III.** — *O número e não póde ser inteiro.*
Com efeito, o número e é superior a 2 e inferior a 3.

342. **Teorema IV.** — *O número e não póde ser fracionario.*
Se o fôsse, teriamos :

$$e=\frac{p}{q}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{2.3\ldots q}+\frac{1}{2.3.4\ldots q(q+1)}+\ldots$$

onde p e q são dois inteiros.
Multiplicando tudo por $2.3\ldots q$, vem :

$$2.3\ldots(q-1)\,p=\text{parte inteira}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots \quad (1)$$

e como

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\ldots$$

$$\text{ou } <\frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}} \text{ ou } <\frac{1}{q} \text{(nº 261),}$$

achariamos que o 1º membro de (1), ou $2.3\ldots(q-1)p$ seria inteiro e, ao mesmo tempo, igual a um número inteiro mais uma expressão não nula e menor que a fração $\frac{1}{q}$: é um absurdo.

343. Como a série e não é nem inteira, nem fracionaria, é pois, um número *incomensuravel.*

344. — *Demonstra-se ainda que e é o limite, para* $n=\infty$, *da expressão* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

ou ainda o limite, para $\alpha=0$, *da expressão* $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

VI. Desenvolvimento em série.

345. O grande método para o desenvolvimento em série é a divisão ordenada segundo as potências crescentes de uma letra.

346. Exemplo. — Temos, com efeito :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...$$

Basta efetuar a divisão indicada no 1º membro para se obter o 2º membro.

Se $x<1$, a série é convergente e a igualdade é absolutamente exata.

Se $x>1$, é preciso, para não errar, acrescentar a fração que provem do resto e escrever :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+.....+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

347. A extração da raiz de indice qualquer, segundo as potências crescentes de uma letra, fornece igualmente séries.

VII. Metodo dos coeficientes indeterminados.

348. **Teorema.** — *Se uma equação da forma*

$$M+Nx+Px^2+Qx^3+...=0$$

(M, N, P,... sendo coeficientes independentes de x) deve verificar-se, seja qual fôr o valor de x, é necessario que cada um dos coeficientes seja nulo.

Com efeito, a equação devendo verificar-se seja qual fôr o valor de x, façamos $x=0$, vem

$$M=0;$$

e a equação primitiva reduz-se a

$$Nx+Px^2+Qx^3+...=0,$$

ou, simplificando por x,

$$N+Px^2+Qx^3+...=0.$$

Façamos de novo $x=0$, vem :

$$N=0.$$

Operando do mesmo modo, achamos sucessivamente :

$$P=0, \quad Q=0, \text{ etc.}$$

349. **Corolário.** — *Se uma equação da forma*

$$a+bx+cx^2+dx^3+...=a'+b'x+c'x^2+d'x^3+...$$

se verifica, seja qual fôr o valor de x, os coeficientes das várias potências de x, nos dois membros, são respetivamente iguais.

Com efeito, fazendo passar tudo para o 2º membro, vem

$$0=a'-a+(b'-b)x+(c'-c)x^2+(d'-d)x^3+...$$

O teorema precedente dá :

$$a'-a=0\,;\ \text{donde}\ a=a';$$
$$b'-b=0\,;\ \text{donde}\ b=b';$$
$$c'-c=0\,;\ \text{donde}\ c=c';$$
$$d'-d=0\,;\ \text{donde}\ d=d';$$

. . . .

. . . .

350. O método dos coeficientes indeterminados permite desenvolver uma expressão em série quando já se conhece a forma desta série.

De ordinário, a série procede segundo as potências crescentes de x.

351. Exemplo. — Desenvolver $\frac{a}{b+cx}$ em série segundo as potencias crescentes de x.

Escrevemos

$$\frac{a}{b+cx}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+...$$

Para determinar A, B, C, D,... em função de a, b, c, façamos desaparecer os denominadores e passar tudo para o 2º membro ; temos :

$$0=Ab-a+(Bb+Ac)x+(Cb+Bc)x^2$$
$$+(Db+Cc)x^3+(Eb+Dc)x^4+...$$

Esta equação deve verificar-se seja qual fôr o valor de x ; decompõe-se nas seguintes (nº 348) :

$$Ab-a=0\ ; \quad \text{donde :} \quad A=\frac{a}{b}\ ; \qquad (1)$$

$$Bb+Ac=0\ ; \quad \text{donde :} \quad B=-\frac{Ac}{b}=-\frac{c}{b}\times\frac{a}{b}=-\frac{ac}{b^2}\ ; \qquad (2)$$

$$Cb+Bc=0\ ; \quad \text{donde :} \quad C=-\frac{Bc}{b}=\frac{c}{b}\times\frac{ac}{b^2}=\frac{ac^2}{b^3}\ ; \qquad (3)$$

$$Db+Cc=0\ ; \quad \text{donde :} \quad D=-\frac{Cc}{b}=-\frac{c}{b}\times\frac{ac^2}{b^3}=-\frac{ac^3}{b^4}; \qquad (4)$$

e assim por diante.

Logo, temos :

$$\frac{a}{b+cx}=\frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}x+\frac{ac^2}{b^3}x^2-\frac{ac^3}{b^4}x^3+\ldots$$

352. **Observação.** — A divisão de a por $b+cx$ daria logo o mesmo resultado.

PROBLEMAS SOBRE OS COEFICIENTES INDETERMINADOS

2620. Pelos coeficientes indeterminados calcular p, q, m e n de modo que x^4+1 seja o produto de x^2+px+q por x^2+mx+n.

2621. Determinar p, q, m e n de modo que x^4+px^2+q seja o produto de x^2-6x-5 por x^2+mx+n.

2622. Determinar a, b, m, n, p e q de modo que ax^5+bx^4+1 seja o produto de $(x-1)^2$ por mx^3+nx^2+px+q.

2623. Pôr a fração $\frac{x-1}{3x^2-7x+2}$ debaixo da forma

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}.$$

isto é, calcular A, B, a e b.

2624. Achar as condições para que a fração $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ conserve o mesmo valor, seja qual fôr o valor de x.

2625. Achar as condições para que a fração $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ seja independente da variavel x.

2626. Determinar m e n de modo que o polinómio

$$x^4-3x^2+mx+n$$

seja divisivel por x^2-2x+4. Indicar o quociente.

2627. Determinar m de modo que os polinómios

1º $x^4+ma^2x^2+a^4$

2º $x^3-max^2+ma^2x-a^3$

sejam divisiveis por x^2-ax+a^2. Indicar os quocientes.

2628. Determinar p e q de modo que x^4+px^2+q seja divisivel por x^2+2x+5. Dar o quociente.

2629. Determinar m, n, p de modo que

$$x^5-2x^4-6x^3+mx^2+nx+p$$

seja divisivel por $(x-3)\ (x+1)\ (x-1)$. Dar o quociente.

VIII. Equação exponencial.

353. **Definição.** — *Equação exponencial* é a que contem a incógnita como expoente.

Exemplo :

$$a^x=b\ ;\ a^{x^2-2x-1}=c\ ;\ a^{x^2-2x+1}=d$$

são equações exponenciais do 1º gráu, porque só o 1º expoente contem a incognita.

354. Equação exponencial do 2.º gráu é a que tem por expoente uma exponencial do 1.º gráu.

Exemplos :

$$a^{b^x}=c\ ;\ a^{b^{x^2-5}}=d$$

Resolução da equação $a^x=b$.

355. 1.º *Método, por meio dos logaritmos.* — Temos logo, tomando os logaritmos dos dois membros :

$$x \log a=\log b\,.$$

Donde :

$$x=\frac{\log b}{\log a}.$$

356. 2.º *Método, por meio das frações continuas.* — Seja resolver a equação :

$$2^x=6\,. \qquad (1)$$

Fazendo sucessivamente $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$ temos

$$2^0=1<6$$
$$2^1=2<6$$
$$2^2=4<6$$
$$2^3=8>6$$

Portanto, x é superior a 2 e inferior a 3.
Façamos

$$x=2+\frac{1}{y};$$

vem

$$2^{2+\frac{1}{y}}=6 \quad \text{ou} \quad 2^2\times 2^{\frac{1}{y}}=6;$$

donde

$$2^{\frac{1}{y}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2};$$

donde finalmente

$$\left(\frac{3}{2}\right)^y=2; \qquad (2)$$

equação semelhante á equação (1).
Façamos tambem sucessivamente $y=0, 1, 2, 3,...$ vem

$$\left(\frac{3}{2}\right)^0=1<2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1=1\frac{1}{2}<2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}>2$$

Portanto, na equação (2), y é superior a 1, mas inferior a 2.

Como acima, façamos $y=1+\frac{1}{z}$, a equação (2) dá :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{z}}=2,$$

ou

$$\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}}=2;$$

donde

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}}=\frac{4}{3};$$

donde finalmente

$$\left(\frac{4}{3}\right)^z=\frac{3}{2}, \qquad (3)$$

equação analoga ás equações (1) e (2).

Façamos tambem sucessivamente $z=0, 1, 2, 3,...$ vem

$$\left(\frac{4}{3}\right)^0=1<\frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^1=1\frac{1}{3}<\frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}=1\frac{7}{9}>\frac{3}{2}$$

Portanto, na equação (3), z é superior a 1 e inferior a 2.

Como acima, façamos $z=1+\frac{1}{u}$, a equação (3) dá :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{u}}=\frac{3}{2},$$

ou

$$\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{3}{2};$$

donde

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{9}{8};$$

donde finalmente

$$\left(\frac{9}{8}\right)^u=\frac{4}{3}, \qquad (4)$$

equação analoga ás equações (1), (2) e (3).
Façamos tambem sucessivamente $u=0, 1, 2, 3,...$ vem :

$$\left(\frac{9}{8}\right)^0=1<\frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{9}{8}\right)^1=1\frac{1}{8}<\frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2=\frac{81}{64}=1\frac{17}{64}<\frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{9}{8}\right)^3=\frac{729}{512}=1\frac{217}{512}>1\frac{1}{3}$$

Portanto, u é superior a 2 e inferior a 3.

Como acima, façamos $u=2+\frac{1}{v}$, a equação (4) dá :

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2+\frac{1}{v}}=\frac{4}{3},$$

ou

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}} = \frac{4}{3};$$

donde

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}} = \frac{256}{243};$$

donde finalmente

$$\left(\frac{256}{243}\right)^v = \frac{9}{8}, \qquad (5)$$

equação analoga ás equações (1), (2), (3) e (4).

Temos obtido sucessivamente :

$$x=2+\frac{1}{y}; \quad y=1+\frac{1}{z}; \quad z=1+\frac{1}{u}; \quad u=2+\frac{1}{v}.$$

Para o valor de x, teremos a fração continua

$$x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

(Vêr Aritm. F. T. D. curso médio nº 345).

cujas reduzidas sucessivas são :

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{3}{1}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{13}{5};$$

são os valores aproximados de x.

357. **Observação.** — Sabe-se que o erro é menor do que a unidade dividida pelo quadrado do denominador da ultima reduzida.

Assim, tomando $x=\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}$, o erro é menor do que $\frac{1}{5^2}$ ou $< \frac{1}{25}$.

PROBLEMAS SOBRE AS EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Resolver as equações seguintes :

2630. $(a^x)^x=(a^{16})^2$

2631. $(a^2)^x = (a^{4x})^x$

2632. $a^{(c-x)x}=a^{2x}$

2633. $(7^{4x-1})^{3-x}=1$

2634. $(10^{5-x})^{3-x}=1$

2635. $(12^{5-x})^{3-x}=144$

2636. $\sqrt[x]{7}=7^x$

2637. $a^2a^x=\sqrt[x]{a^3}$

2638. $2^{x+1}-4^x=-48$

2639. $\log x=\log 48-\log 6$

2640. $5 \log x=\log 288+3 \log \frac{x}{2}$

2641. $\begin{cases} x^2+y^2=425 \\ \log x + \log y=2 \end{cases}$

2642. $\begin{cases} \log \sqrt{x}-\log \sqrt{5}=0,5 \\ 3 \log x+2 \log 5 = 1,50515 \end{cases}$

2643. $3^x=6561$

2644. $\left(\frac{1}{2}\right)^x=20$

2645. $3^{\frac{x}{2}}=729$

2646. $25^{2x-1}=10\,000$

2647. $3^{\sqrt{x}}= 2\,187$

2648. $3^{x^2-5x}=81$

2649. $x^{x^2-16x+48}=1$

2650. $5^{x^2-5x+9}=125$

2651. $3^{x^2-9x-30}=729$

2652. $2^x.3^{2x}=24$

2653. $3^{2x}.4^{5x-1}=18$

2654. $7^{2x} -6.7^x+5=0$

2655. $a.a^2.a^3.a^4.....a^x=b$

2656. $a.a^3.a^5.a^7....a^{2x+1}=b$

2657. $a.a^2.a^4.a^6.....a^{2x}=b$

IX. Teoria algebrica dos logaritmos.

358. Seja a equação exponencial

$$a^x=y,$$

em que a é numero positivo constante e y, qualquer numero positivo ; por definição, x é o logaritmo de y no sistema de base a.

Fazendo sucessivamente

$$x= \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ \dots$$

vem

$$y= \ 1, \ a, \ a^2, \ a^3, \ a^4, \ a^5, \ a^6, \ \dots$$

Os valores de y maiores do que 1 têm por logaritmos números inteiros ou fracionarios, mas positivos ; e x é tanto maior quanto maior fôr y.

Fazendo sucessivamente

$$x= \ 0, -1, -2, -3, -4, -5, \ \dots$$

vem

$$y= \ 1, \ \frac{1}{a}, \ \frac{1}{a^2}, \ \frac{1}{a^3}, \ \frac{1}{a^4}, \ \frac{1}{a^5}, \ \dots$$

Os valores de y menores do que 1 têm por logaritmos números negativos e tanto menores quanto mais o valor de y tende para 0.

359. Como no n.º 266, os logaritmos são, pois, os termos de uma progressão aritmética começando por 0, e correspondentes têrmo a têrmo aos números de uma progressão geométrica começando por 1.

A progressão geométrica, no sistema de base a, é :

$$\frac{1}{a^4},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a},\quad 1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5$$

e os termos correspondentes da progressão aritmética, isto é, os logaritmos dos números precedentes, são :

$$-4, -3, -2, -1, \quad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

360. As quatro propriedades fundamentais dos logaritmos (nº 271) deduzem-se do mesmo modo.

O log. do produto de varios factores iguala a soma dos logaritmos dos factores.

Com efeito, seja por exemplo :

$$y=a^x;\quad y'=a^{x'}\quad \text{e}\quad y''=a^{x''}.$$

Temos

$$y.y'.y''=a^{x+x'+x''};$$

donde se vê que :

$$log\,(y.y'.y'')=x+x'+x''=log\,y+log\,y'+log\,y''.$$

E assim por diante para as 3 outras propriedades.

INDICE DAS MATÉRIAS

CALCULO ALGÉBRICO

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRÁU

Imp. E. VITTE, 18, r. de la Quarantaine, Lyon. — 10.000. — 6° — VI-32